
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الرِّيَاضيَّات
٩
السنة التّاسعة من التعليم الأساسي
المعهد التربوي الوطني - الجزائر
9 8 7 6 5 4 3 2 1

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربيــة الوطنيــة

الرِّيَاضِيَّات

السنة التاسعة من التعليم الأساسي

المؤلفون

زهية فارسي ـ مفتشة التربية والتكوين

إبراهيم العسل ، الطاهر عمور ، مقتدر زروقي- أساتذة



المعهد التربوي الوطني - الجزائر



هذا الكتاب هو الثالث من سلسلة كتب الرياضيات للطور الثالث من التعليم الأساسي ، وهو موجه بالدرجة الأولى إلى تلميذ السنة التاسعة التي هي تتويج لسنوات التعليم الأساسي .

لقد راعينا في هذا الكتاب نفس منهجية الكتابين السابقين حيث قدمنا الخواص والنظريات على شكل مسائل تعتمد على التحليل والتركيب ، وتثير حوافز التلميذ للبحث والاكتشاف ، كما أدرجنا في نهاية جل الدروس مسائل محلولة تعين التلميذ على التدرب في حل التمارين والمسائل ، وتكون منوالاً لتوظيف المفاهيم المكتسبة في الدرس ، ونرى أن تلك المنهجية تمكّن التلميذ من استيعاب المفاهيم واستخلاص النتائج والقيام بالتطبيقات .

وقد زوّدنا الكتاب ببعض الصفحات الخاصة التي تنمي عند التلميذ الجانب الثقافي وتطلعه على بعض علماء الرياضيات ، ومساهمة الرياضيين المسلمين في هذا الميدان .

أملنا كبير في إثراء هذا الكتاب بملاحظات واقتراحات المربين حتى نساهم جميعًا في تطوير الكتاب المدرسي في بلادنا .

والله ولي التوفيق .

المؤلفون

1 مجموعات الأعداد: مراجعة وتتمات

1. مجموعات الأعداد :

سبق لك أن تعرفت على المجموعات العددية الآتية :

1) مجموعة الأعداد الطبيعية ط = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، .... }
المجموعة ط* = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ..... } هي مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة .

2) مجموعة الأعداد الصحيحة
ص = { ... ، −2 ، −1 ، 0 ، +1 ، +2 ، +3 ، .... }
• ص* = ص − { 0 } هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة .
• ص⁺ = { 0 ، +1 ، +2 ، +3 ، .... } هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو المعدومة
• ص⁻ = { 0 ، −1 ، −2 ، −3 ، ... } هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة أو المعدومة .

3) مجموعة الأعداد الناطقة ك = { س = $\frac{أ}{ب}$ / أ ∈ ص و ب ∈ ص* } .

ك* = ك − { 0 }

ك⁺ = { س = $\frac{أ}{ب}$ / أ ∈ ص ، ب ∈ ص* و أ ، ب لهما نفس الإشارة } .

ك⁻ = { س = $\frac{أ}{ب}$ / أ ∈ ص ، ب ∈ ص* و أ ، ب لهما إشارتان مختلفتان } .

ـ أكمل بأحد الرمزين ∋ ، ∌ :

5 … ط ؛ 0 … ط* ؛ 0 … ك ؛ π … ص ؛ $\frac{3}{2}$ … ص ؛

$\frac{1988}{100}$ … ك ؛ $\frac{1}{2}$ … ط ؛ − 1,99 … ص$^{-}$ ؛ − 3 … ك$^{-}$ ؛

0 … ص ؛ − 5 … ط ؛ 1408 … ط ؛ + 5 … ص$^{+}$ ؛ $\frac{1}{2}$ … ك$^{-}$ ؛

− 19,88 … ك ؛ 3,5 … ص$^{+}$ ؛ − 2 … ص$^{-}$.

ملاحظات :

- كل من المجموعات المذكورة هي مجموعة غير منتهية .
- ط = ص$^{+}$.
- ط ⊂ ص ⊂ ك .
- ع ⊂ ك (ع هي مجموعة الأعداد العشرية) .

1) اكتب كلاً من المجموعتين الآتيتين بإعطاء خاصة مميزة لكل منها :
ز = {0 ، 2 ، 4 ، 6 ، ...} ؛ ف = {1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، ...} .

2) عيّن كلاً من المجموعات الآتية :
ص$^{+}$ ∪ ص$^{-}$ ؛ ص$^{+}$ ∩ ص$^{-}$ ، ك$^{+}$ ∪ ك$^{-}$ ، ك$^{+}$ ∩ ك$^{-}$ ،
ط ∩ ص ∩ ك

2. مضاعفات وقواسم عدد طبيعي :

1) تذكر أنه :

- إذا كان أ عددًا طبيعيًا فإن المجموعة :

{0 ، أ ، 2أ ، 3أ ، ..... نأ ، .... } حيث ن ∈ ط ،

هي **مجموعة مضاعفات** أ .

مثال :

نعلم أن $35 = 7 \times 5$ فالعدد 35 هو مضاعف لكل من 7 و 5 .

لدينا $م_5$ = {0 ، 5 ، 10 ، 15 ، .... 5ن ، ... } هي مجموعة مضاعفات 5 .

$م_7$ = {0 ، 7 ، 14 ، 21 ، .... 7ن ، ... }

- وإذا كان أ مضاعفًا للعدد ب أي أ = ب × ح (حيث ح ∈ ط) .فإن ب هو قاسم للعدد أ .

نقول إن ح هو حاصل القسمة التام للعدد أ على العدد ب .

ملاحظة :

★ الصفر مضاعف لكل عدد طبيعي .

★ الصفر ليس قاسمًا لأي عدد طبيعي .

- إذا لم يكن العدد الطبيعي أ مضاعفًا للعدد الطبيعي غير المعدوم ب فإن :

1) حاصل قسمة أ على ب ليس عددًا طبيعيًا .

2) يمكن حصر العدد أ بين مضاعفين متتاليين للعدد ب ، أي يمكن أن نجد عددًا طبيعيًا ح بحيث يكون :

ب × ح < أ < ب (ح + 1)

و

أ = ب × ح + ر (0 < ر < ب)

العدد ح هو حاصل قسمة أ على ب المقرب إلى الوحدة والعدد ر هو باقي القسمة .

مثال :

العدد 34 ليس مضاعفًا للعدد 7 ، أي 7 ليس قاسمًا للعدد 34 .
لكن 34 محصور بين المضاعفين المتتاليين 28 و 35 للعدد 7 .

أي $35 > 34 > 28$

$$\begin{cases} 5 \times 7 > 34 > 4 \times 7 \\ \text{و} \\ 6 + 4 \times 7 = 34 \qquad (7 > 6 > 0) \text{ .} \end{cases}$$

العدد 4 هو حاصل القسمة المقرّب إلى الوحدة للعدد 34 على 7 ، 6 هو باقي القسمة .

2) اذكر كلاًّ من قاعدتي إيجاد :

1) المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين .

2) القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين .

مثال 1 : ا $= 640$ ، ب $= 700$.

لنحسب م م أ (ا ، ب) ، ق م أ (ا ، ب) .

ـ نحلّل ا و ب إلى جُداء عوامل أولية فنجد :

ا $= 2^7 \times 5$ و ب $= 2^2 \times 5^2 \times 7$.

ـ إذن م م أ (ا ، ب) $= 2^7 \times 5^2 \times 7 = 128 \times 25 \times 7 = 22400$

و ق م أ (ا ، ب) $= 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$.

ملاحظة :

إذا كان ا و ب عددين أوليين فيما بينهما فإن :

ق م أ (ا ، ب) $= 1$ و م م أ (ا ، ب) = ا × ب .

مثال 2 :

$15 = 3 \times 5$

$8 = 2^3$

لاحظ أن 15 و 8 أوليان فيما بينهما

إذن ق م أ (15 ، 8) = 1 و م م أ (15 ، 8) = 15 × 8 = 120 .

---

1) عيّن م م أ (48 ، 18) ثم ق م أ (48 ، 18) .

2) ما هو م م أ (18 ، 48 ، 72) ؟ وما هو ق م أ (18 ، 48 ، 72) ؟

3) اختزل كلاً من الكسور الآتية :

$\frac{36}{48}$ ؛ $\frac{72}{18}$ ؛ $\frac{85}{15}$.

4) وحّد مقامات الكسور الآتية :

$\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{7}$ ثم $\frac{11}{9}$ ، $\frac{10}{7}$ ، $\frac{26}{45}$.

---

3. إشارة عدد ناطق وقيمته المطلقة :

- س عدد ناطق حيث س = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ـ يكون العدد س **موجبًا** إذا كان العددان الصحيحان أ ، ب من نفس الإشارة .

ونكتب : س = + $\frac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$

ـ ويكون س **سالبًا** إذا كان العددان الصحيحان من إشارتين مختلفتين .

ونكتب : س = − $\frac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$.

مثال : $\frac{-2}{-3} = + \frac{|-2|}{|-3|} = + \frac{2}{3}$.

$\frac{-5}{+6} = - \frac{|-5|}{|+6|} = - \frac{5}{6}$.

القيمة المطلقة لعدد ناطق :

- س عدد ناطق .

$|\text{س}| = +\text{س}$ إذا كان س موجبًا
$|\text{س}| = -\text{س}$ إذا كان س سالبًا .

• مهما يكن العدد الناطق س فإن :
$|\text{س}| = |-\text{س}|$

القيمة المطلقة لعدد ناطق هي عدد ناطق **موجب** .

مثال : $\left|\frac{-3}{-7}\right| = \left|+\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$.

$\left|\frac{-5}{+2}\right| = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$.

1) عيّن الإشارة والقيمة المطلقة لكل من الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{-23}{+9}$ ؛ $\frac{+9}{+15}$ ؛ $\frac{-28}{-7}$ ؛ $\frac{+213}{-10}$.

2) عيّن العدد الناطق س بحيث :

$|\text{س}| = \frac{3}{2}$ ؛ $|\text{س}| = \frac{-5}{-6}$ ؛ $|-\text{س}| = 3$.

3) عيّن كلاً من :

$\left|-\frac{3}{5}\right|$ ؛ $\left|\frac{-3}{+5}\right|$ ؛ $\left|\frac{+3}{-5}\right|$ ؛ $|-2,5|$ ؛ $|+2,5|$ ؛ $|-5|$.

4. تساوي عددين ناطقين :

تذكر أنه :

مهما يكن العدد الناطق $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ومهما يكن العدد الصحيح غير المعدوم م ، فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ م}}{\text{ب م}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \xrightarrow{\times \text{م}} \frac{\text{أ م}}{\text{ب م}} \qquad \frac{\text{أ م}}{\text{ب م}} \xrightarrow{: \text{م}} \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

ملاحظة :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ معناه أ د = ب ج.

1) اعط ثلاثة كسور تُمثّل العدد الناطق $\frac{2}{5}$.

2) عيّن الأعداد الناطقة المتساوية من بين الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{-3}{4}$ ؛ $-\frac{24}{32}$ ؛ $\frac{20}{-24}$ ؛ $\frac{-270}{360}$.

5. خواص الجمع في ك.

• مجموع عددين ناطقين من نفس الإشارة هو عدد ناطق :
- له نفس الإشارة
- وقيمته المطلقة هي مجموع قيمتيهما المطلقتين.

مثال :

$$\left(+\frac{13}{8}\right) + \left(+\frac{7}{8}\right) = \frac{+13+7}{8} = +\frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

$$\left(-\frac{91}{17}\right) + \left(-\frac{132}{15}\right) = \frac{-1365-2244}{255} = -\frac{3609}{255} = \frac{1203}{85}$$

• مجموع عددين ناطقين مختلفين في الإشارة هو عدد ناطق :
- إشارته هي إشارة أكبرهما بالقيمة المطلقة .
- وقيمته المطلقة هي فرق قيمتيهما المطلقتين .

مثال :

$$\left(+\frac{317}{28}\right) + \left(-\frac{37}{28}\right) = \frac{317-37}{28} = +\frac{280}{28} = +10.$$

$$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{22}{7}\right) = \frac{21-88}{28} = -\frac{67}{28}.$$

إذا كان س ، ع عددين ناطقين حيث | س | > | ع | فإن إشارة المجموع س + ع تكون كما في الجدول الآتي :

إشارة س	+	−	+	−	
إشارة ع	+	−	−	+	
إشارة س + ع	+	−	+	−	

• مهما يكن العددان الناطقان س، ع فإن:

س+ع=ع+س

• مهما تكن الأعداد الناطقة س، ع، ص فإن:

(س+ع)+ص=س+(ع+ص).

• مهما يكن العدد الناطق س فإن: س+0=0+س=س

• مهما يكن العدد الناطق س فإن: س+(−س)=(−س)+س=0.

−س هو معاكس س.

• مهما تكن الأعداد الناطقة س، ع، ص فإن:

س=ع معناه س+ص=ع+ص

• −(س+ع)=(−س)+(−ع) أي أن معاكس مجموع عددين ناطقين يساوي مجموع معاكسيهما.

6 خواص الطرح في ك:

• ع+ف=س معناه ف=س−ع ،
ف هو فرق العددين س، ع.

• مهما يكن العددان الناطقان س، ع فإن:

س−ع=س+(−ع).

س−ع=−(ع−س) أي أن (س−ع) هو معاكس (ع−س).

• مهما يكن العدد الناطق س فإن :

س − 0 = س

س − س = 0

• مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن .

س = ع معناه س − ص = ع − ص .

و س − ع = (س + ص) − (ع + ص)

قاعدة حذف أو وضع الأقواس :

أ ، ب ، حـ أعداد ناطقة :

$$\text{أ} + (\text{ب} - \text{حـ}) = (\text{أ} + \text{ب}) - \text{حـ} = \text{أ} + \text{ب} - \text{حـ}$$

$$\text{أ} - (\text{ب} + \text{حـ}) = (\text{أ} - \text{ب}) - \text{حـ} = \text{أ} - \text{ب} - \text{حـ}$$

$$\text{أ} - (\text{ب} - \text{حـ}) = (\text{أ} - \text{ب}) + \text{حـ} = \text{أ} - \text{ب} + \text{حـ}$$

أمثلة :

- $\frac{5}{4} + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\right) = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{6}$
- $\frac{13}{6} - \left(5 + \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{13}{6} - 5\right) - \frac{3}{7}$
- $\frac{7}{8} - \left(\frac{9}{10} - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{7}{8} - \frac{9}{10}\right) + \frac{3}{2}$.

احسب كلاً مما يلي :

1) $\frac{-17}{25} + \frac{13}{20}$ ؛ $15 - \frac{31}{12}$ ؛ $\frac{45}{-35} - \frac{15}{7}$.

2) $\frac{12}{15} - \frac{8}{14} + 3$ ؛ $7 + \frac{3}{4} - 19$ ؛ $\frac{45}{6} - \frac{24}{18} - \frac{12}{5}$.

3) احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

$\frac{6}{4} - \left(\frac{-14}{20} + \frac{3}{-5}\right)$ ؛ $9 - \left(-\frac{5}{7} + \frac{-3}{14}\right)$ ؛

$\left(\frac{3}{2} - \frac{-7}{4}\right) + \left(\frac{6}{5} + \frac{8}{-2} - \frac{6}{10}\right)$

7. خواص الضرب في ك :

• **جداء عددين ناطقين :**

جداء عددين ناطقين لهما نفس الإشارة هو عدد ناطق **موجب** ، قيمته المطلقة هي جداء قيمتيهما المطلقتين .

مثال : $12+=\frac{10\times18}{3\times5}+=\left(\frac{10}{3}+\right)\times\left(\frac{18}{5}+\right)$

$.\frac{15}{14}+=\frac{5\times3}{7\times2}+=\left(\frac{5}{7}-\right)\times\left(\frac{3}{2}-\right)$

• جداء عددين ناطقين مختلفين في الإشارة هو عدد ناطق **سالب** ، قيمته المطلقة هي جداء قيمتيهما المطلقتين .

مثال : $.\frac{21}{40}-=\frac{3\times7}{8\times5}-=\left(\frac{3}{8}+\right)\times\left(\frac{7}{5}-\right)$

$.\frac{9}{19}-=\frac{18}{38}-=\frac{2\times9}{19\times2}-=\left(\frac{2}{19}-\right)\times\left(\frac{9}{2}+\right)$

• **إشارة جداء عددين ناطقين :**

س ، ع عددان ناطقان لدينا :

إشارة س	+	−	+	−
إشارة ع	+	−	−	+
إشارة س×ع	+	+	−	−

• **القيمة المطلقة لجداء عددين ناطقين :**

> مهما يكن العددان الناطقان س ، ع فإن :
> |س × ع| = |س| × |ع| .

خواص :

1) الضرب في ك تبديلي

أي مهما يكن العددان الناطقان س ، ع فإن :

س × ع = ع × س

مثال : $(+3)\times\left(-\frac{5}{4}\right) = \left(-\frac{5}{4}\right)\times(+3) = -\frac{15}{4}$.

2) الضرب في ك تجميعي

أي مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :

(س × ع) × ص = س × (ع × ص) .

مثال : $\left(+\frac{3}{2}\right)\times\left[7\times(-6)\right] = \left(+\frac{3}{2}\right)\times(-42) = -63$

$\left[\left(+\frac{3}{2}\right)\times 7\right]\times(-6) = \left(+\frac{21}{2}\right)\times(-6) = -63$

إذن $\left(+\frac{3}{2}\right)\times\left[7\times(-6)\right] = \left[\left(+\frac{3}{2}\right)\times 7\right]\times(-6)$.

3) العدد الناطق 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى الضرب في ك .

أي مهما يكن العدد الناطق س فإن :

س × 1 = 1 × س = س .

4) لكل عدد ناطق غير معدوم س نظير بالنسبة للضرب في ك

أي مهما يكن العدد الناطق غير المعدوم س فإنه يوجد عدد ناطق غير معدوم س′ بحيث :

$$\text{س} \times \text{س}' = \text{س}' \times \text{س} = 1$$

س′ يسمى مقلوب س ونكتب : $\text{س}' = \frac{1}{\text{س}}$.

5) مهما يكن العدد الناطق س فإن :

$$\text{س} \times (-1) = -\text{س}$$

مثال : $\left(-\frac{3}{2}\right) \times (-1) = \left(+\frac{3}{2}\right)$

$(+5) \times (-1) = (-5)$.

6) توزيع الضرب بالنسبة إلى الجمع وإلى الطرح في ك.

أي مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :

$\text{س} \times (\text{ع} + \text{ص}) = \text{س ع} + \text{س ص}$.

$\text{س} \times (\text{ع} - \text{ص}) = \text{س ع} - \text{س ص}$.

مثال :

$$\text{أ} = \frac{3}{2}\left(5 + \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{3}{2} \times 5\right) + \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{7}\right) = \frac{15}{2} + \frac{12}{14} = \frac{105+12}{14} = \frac{117}{14}.$$

$$\text{ب} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left[\left(+\frac{5}{7}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right)\right] = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(+\frac{5}{7}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right)$$

$$\text{ب} = \left(-\frac{5}{14}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{-20+21}{56} = \frac{1}{56}.$$

احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

$$\left(-\frac{13}{4}\right)\times\left(\frac{-45}{16}\right)\times\left(\frac{18}{-15}\right) \text{ ؛ } \frac{24}{-5}\times 8\times\frac{-45}{36} \text{ ؛}$$

$$\frac{25}{-6}\times\frac{-18}{5}\times\frac{7}{15} \text{ ؛}$$

$$\frac{13}{6}\left(\frac{-10}{26}+\frac{5}{-39}\right) \text{ ؛ } \frac{4}{5}\left(\frac{15}{12}-\frac{27}{48}\right) \text{ ؛}$$

$$\left(2-\frac{7}{-5}\right)\left(\frac{-14}{8}+\frac{5}{-4}\right).$$

8. قوة عدد ناطق وخواصها :

س عدد ناطق ، ن عدد طبيعي غير معدوم.

- الجداء $\underbrace{\text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \ldots\ldots \times \text{س}}_{\text{ن عاملا}}$ يسمى القوة النونية للعدد الناطق س ونرمز إليه بالرمز $\text{س}^{\text{ن}}$.

ونكتب : $\text{س}^{\text{ن}} = \underbrace{\text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \ldots\ldots \times \text{س}}_{\text{ن عاملاً}}$

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^2=\frac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2} \text{ ؛ } \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^3=\frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^3} \text{ ؛ } \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}=\frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}} \text{ ؛}$$

$$\left(\frac{1}{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}\right)^{\text{ن}}=\left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}}=\frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\text{أ}^{\text{ن}}}.$$

أمثلة :

$$(-3)^2 = (-3)\times(-3) = +9 .$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right)^4 = \left(\frac{-5}{7}\right)^4 = \frac{(-5)^4}{7^4} = \frac{+625}{2401} .$$

$$\left(+\frac{6}{8}\right)^3 = \left(\frac{+6}{8}\right)^3 = \frac{(+6)^3}{8^3} = \frac{216}{512} .$$

• م ، ه عددان صحيحان :

- مهما يكن العدد الناطق غير المعدوم س فإن :

1) $(س^{م})^{ه} = س^{م . ه}$

2) $س^{م} \times س^{ه} = س^{م + ه}$

- مهما يكن العددان الناطقان غير المعدومين س و ع فإن :

$(س . ع)^{م} = س^{م} . ع^{م}$

أمثلة :

• $$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right]^{-2} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{3(-2)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-6}$$

• $$\left(-\frac{2}{7}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{7}\right)^{+4} = \left(-\frac{2}{7}\right)^{(-3)+(+4)}$$

$$= \left(-\frac{2}{7}\right)^{+1} = -\frac{2}{7} ,$$

• $$\left[\left(-\frac{5}{6}\right) \times \frac{4}{7}\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^3 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^3$$

احسب كلاً من الأعداد الآتية :

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}$ ؛ $\left(\frac{-4}{5}\right)^{4}$ ؛ $\left(\frac{-2}{-7}\right)^{2}$ ؛ $\left(\frac{-1}{2}\right)^{5}$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ؛ $\left(\frac{4}{3} \times \frac{15}{12}\right)^{3}$ ؛

$\left[\left(\frac{-5}{3}\right)^{-3}\right]^{2}$.

9. حاصل قسمة عدد ناطق على آخر :

• حاصل قسمة عدد ناطق س على عدد ناطق غير معدوم ع هو العدد الناطق الوحيد ح ، حيث $\text{س} = \text{ح} \times \text{ع}$.

نكتب : $\text{ح} = \text{س} \div \text{ع}$ أو $\text{ح} = \frac{\text{س}}{\text{ع}}$.

$\text{ح} = \frac{\text{س}}{\text{ع}}$ معناه $\text{س} = \text{ح} \times \text{ع}$

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ عددان ناطقان غير معدومين .

تذكر أن :

• : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ح}}{\text{د}}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{ح}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب ح}}$.

• $\frac{1}{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = 1 \times \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ ($\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ هو مقلوب $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$) .

• هـ عدد صحيح غير معدوم $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \text{هـ} = \frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}{\text{هـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{1}{\text{هـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب هـ}}$.

أمثلة :

1) $\frac{15}{8} \div \frac{21}{4} = \frac{15}{8} \times \frac{4}{21} = \frac{15 \times 4}{8 \times 21} = \frac{5}{14}$.

2) $\frac{1}{\frac{14}{11}} = 1 \times \frac{11}{14} = \frac{11}{14}$

3) $\left(-\frac{3}{4}\right) \div 75 = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{75} = \frac{-3}{300} = -\frac{1}{100}$.

4) $(-3) \div \left(\frac{6}{7}\right) = (-3) \times \frac{7}{6} = \frac{-21}{6} = -\frac{7}{2}$.

• س عدد ناطق غير معدوم ، ن و هـ عددان صحيحان :

$\frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{هـ}}} = \text{س}^{\text{ن} - \text{هـ}}$.

ملاحظة : $\frac{1}{\text{س}^{\text{هـ}}} = \text{س}^{-\text{هـ}}$.

مقلوب $10^{ن}$ هو $\frac{1}{10^{ن}}$ و $\frac{1}{10^{ن}} = 10^{-ن}$.

أ $= 0,003 \times 2,5 = (3 \times 10^{-3}) \times (25 \times 10^{-1})$

أ $= (3 \times 25) \times (10^{-3} \times 10^{-1}) = 75 \times 10^{-4} = 0,0075$.

ب $= 71 \times 10^{-2} \times 3 \times 10^{-1} \times 5 \times 10^{-3} = (71 \times 3 \times 5)$

$\times (10^{-2} \times 10^{-1} \times 10^{-3})$.

ب $= 1065 \times 10^{-6} = 0,001065$.

احسب كلا مما يلي :

$\frac{35}{18} \div \frac{7}{9}$ ؛ $(-23) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$ ؛ $\left(+\frac{16}{15}\right) \div (-4)$ ؛

$1 \div \left(-\frac{27}{6}\right)$ ؛ $\frac{48}{14} \div \frac{45}{-21}$.

$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-7} \div \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}$ ؛ $\left(\frac{7}{2}\right)^{6} \div \frac{7}{2}$ ؛ $\left(-\frac{9}{5}\right)^{-3}$.

$(-7) \times 10^{-3} \times 15 \times 10^{-2}$ ؛ $8 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{2}$ ؛

$15 \times 10^{-4} - 17 \times 10^{-2}$.

10. الترتيب في ك :

• س ، ع ، ص أعداد ناطقة .

تذكر أن :

س ⩽ ع معناه (س − ع) ∈ ك⁺ . و
س ⩾ ع معناه (س − ع) ∈ ك .

مثلا :

(− 5) ⩾ (− 3) معناه (− 5) − (− 3) ⩾ 0 .

(+ 7) ⩽ (− 2) معناه (+ 7) − (− 2) ⩽ 0 .

س ⩾ ص معناه س + ع ⩾ ص + ع .

• إذا كان س ⩾ ع و ص > 0 فإن س × ص ⩾ ع × ص .

• إذا كان س ⩾ ع و ص < 0 فإن س × ص ⩽ ع × ص .

لدينا (− 8) ⩾ (− 3) إذن (− 8) + (− 2) ⩾ (− 3) + (− 2) .

لدينا (−6) ⩾ (− 4) إذن (− 6) (− 2) ⩽ (−4) × (− 2) .

(+ 7) ⩽ (−3) إذن (+ 7) × $\left(+\frac{1}{2}\right)$ ⩽ (− 3) × $\left(+\frac{1}{2}\right)$.

س ، ع عددان ناطقان :
بيّن أنه إذا كان :
1) س + $\frac{3}{2}$ ⩾ ع + 2 فإن س − $\frac{1}{2}$ ⩾ ع .
2) 3 س − 5 ⩽ 2 ع + 1 فإن 3 س ⩽ 2 ع + 6 .
3) 3 س ⩽ 2 ع + 6 فإن س ⩽ $\frac{2}{3}$ ع + 2 .
4) − 5 س ⩾ 3 ع + 15 فإن س ⩽ − $\frac{3}{5}$ ع − 3 .

11. حاصل القسمة المقرب والنشر العشري :

• يمكن إعطاء حاصل قسمة عدد ناطق س على عدد ناطق غير معدوم ع بتقريب عشري .

مثال : لنحسب $\frac{259}{15}$ بتقريب عشري .

259	15
109	17,266
40	
100	
100	
10	

لاحظ أن :

$$18 \times 15 > 259 > 17 \times 15$$

$$.\ 18 > \frac{259}{15} > 17$$

فالعدد 17 هو حاصل القسمة المقرب بالنقصان إلى الوحدة للعدد **259** على **15** .

لدينا أيضًا : $17,3 > \frac{259}{15} < 17,2$

نقول إن 17,2 هو حاصل القسمة المقرب بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد **259** على **15** .

ولدينا أيضا : $17,27 > \frac{259}{15} < 17,26$

فالعدد 17,26 هو حاصل القسمة المقرب بالنقصان إلى $\frac{1}{10^2}$ للعدد 259 على 15 .

أيضا : $17,266 < \frac{259}{15} < 17,267$

فالعدد 17,266 هو حاصل القسمة المقرب بالنقصان إلى $\frac{1}{10^3}$ للعدد 259 على 15 .

• إذا واصلنا عملية القسمة فإن الباقي دائما غير معدوم .
ونلاحظ أن الرقم 6 يتكرر ابتداء من المرتبة الثانية بعد الفاصلة .
نقول إن الكتابة $17,266\overline{6}...$ **هي نشر عشري غير محدود دوري** ، دوره العدد 6 .

ونكتب : $\frac{259}{15} = 17,26\overline{6}...$

نكتب أيضا $\frac{259}{15} \simeq 17$ ونقرأ حاصل قسمة العدد 259 على 15 **يساوي تقريبا** 17 .

مثال 2 : $\frac{83}{66} = 1,2575\overline{7}...$

الكتابة $1,257\overline{57}...$ هي نشر عشري غير محدود دوري للعدد الناطق $\frac{83}{66}$ ودوره 57 .

نتيجة : كل عدد ناطق يُمثّل بنشر عشري غير محدود دوري

مثال 3 : لنحسب حاصل قسمة العدد 7 على 5 .

العدد $\frac{7}{5}$ هو عدد عشري لأن $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$

نكتب أيضا : $1,4 = 1,40 = 1,400 = 1,4000$.

الكتابة $1,40\overline{0}...$ هي **نشر عشري غير محدود دوري** دوره 0 للعدد العشري $\frac{7}{5}$.

بصفة عامة : كل عدد ناطق عشري يُمثّل بنشر عشري غير محدود دوري، دوره العدد 0 .

مثال 4 :

لاحظ أن $\frac{13}{25}$ هو عدد عشري

وأن $\frac{13}{25} = 0,52$.

يمكن أن نكتب $\frac{13}{25} = 0,52\overline{0}...$

دور العدد العشري $\frac{13}{25}$ (أي العدد العشري 0,52) هو الصفر .

ـ هل $\frac{25}{13}$ الذي هو مقلوب $\frac{13}{25}$ عدد عشري ؟ لا .

لاحظ أن : $\frac{25}{13} = 1,923076...$

نتيجة : مقلوب عدد عشري ليس دوما عددًا عشريًا

1) عيّن من بين الأعداد العشرية الآتية الأعداد التي مقلوبها عدد عشري :

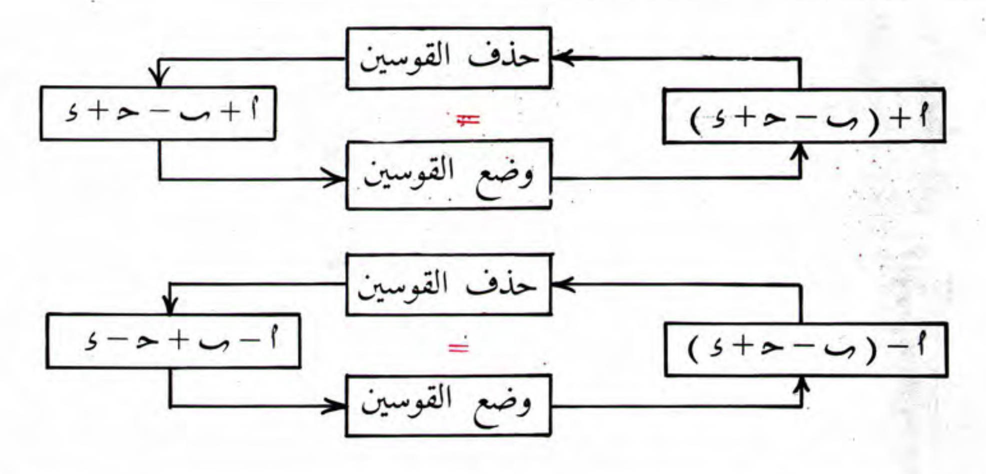
$\frac{5}{10^{3}}$ ؛ $\frac{52}{10^{2}}$ ؛ $0,625$ ؛ -4×10^{-1} ؛ $3,21\times10^{-2}$.

2) ما هو مقلوب كل من الأعداد العشرية الآتية بتقريب 10^{-4} بالنقصان : $2,48$ ؛ $1,54$ ؛ $0,36$ ؛ $12,4$.

12. تطبيقات في ك :

1) قاعدة حذف أو وضع الأقواس :

ا ، ب ، ح ، ء أعداد ناطقة :



احسب بطريقتين كلاًّ من المجاميع الآتية :

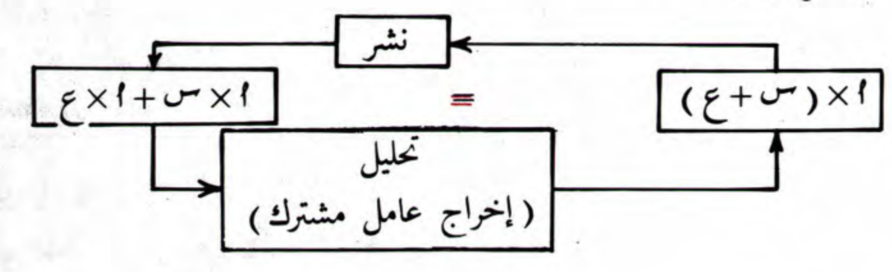
$\frac{3}{2}+\left(5-\frac{2}{3}+7,5\right)$ ؛ $-\frac{5}{7}+\left(-\frac{3}{8}+\frac{9}{13}\right)$.

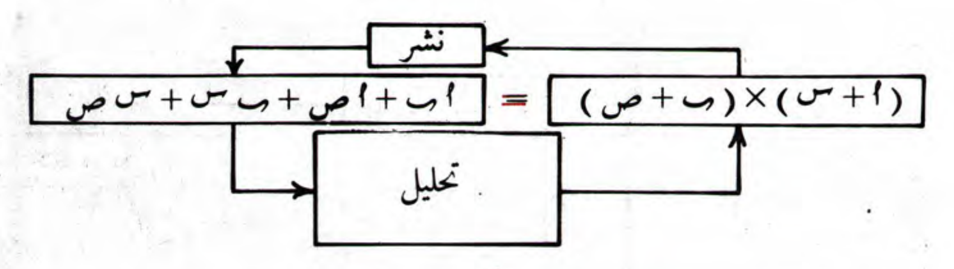
$4-\left(3+\frac{2}{3}-\frac{5}{7}\right)$ ؛ $\left(\frac{9}{4}-2\right)-\left(\frac{-3}{7}-2\right)$.

2) النشر والتحليل :

ا ، س ، ع ، ص أعداد ناطقة .

تذكّر أن :





س ، ع ، ص أعداد ناطقة :

1) انشر كلاً من الجداءات الآتية :

3 (س − 5) ؛ (− $\frac{5}{9}$ + 3 س) (− $\frac{2}{5}$ ع + $\frac{3}{4}$) ؛

6 (2 س − $\frac{5}{6}$ ص + 1) ؛ $\frac{3}{2}$ س (5 س − ع) ؛

2) حلّل كلاً من المجاميع الجبرية الآتية إلى جداء عاملين :

4 س + 4 ص ؛ $\frac{3}{2}$ س^2 − 5 س ؛ $\frac{7}{5}$ س^3 − $\frac{1}{5}$ س^2 − $\frac{2}{10}$ س + $\frac{1}{35}$

3) الجداءات الشهيرة :

س ، ع عددان ناطقان .

$(س + ع)^2 = س^2 + 2\,س\,ع + ع^2$

$(س - ع)^2 = س^2 - 2\,س\,ع + ع^2$

$(س + ع)(س - ع) = س^2 - ع^2$.

أمثلة :

س ، ع عددان ناطقان .

$(3\,س + ع)^2 = 9\,س^2 + 6\,س\,ع + ع^2$.

$\left(س - \frac{1}{2}\right)^2 = س^2 - س + \frac{1}{4}$.

$\left(\frac{3}{2}\,س - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{9}{4}\,س^2 - \frac{5}{2}\,س + \frac{25}{36}$.

$\frac{9}{16}\,س^2 - 4\,ع^2 = \left(\frac{3}{4}\,س\right)^2 - (2\,ع)^2 = \left(\frac{3}{4}\,س - 2\,ع\right)\left(\frac{3}{4}\,س + 2\,ع\right)$.

س ، ع عددان ناطقان .

1) انشر كلاً مما يلي :

$(3 - س)^2$ ، $\left(\frac{2}{3}\,س + \frac{4}{5}\right)^2$ ، $\left(\frac{2}{5}\,س - \frac{3}{2}\,ع\right)\left(\frac{2}{5}\,س + \frac{3}{2}\,ع\right)$

2) س ، ع ، ص أعداد ناطقة . انشر كلاً من الجداءات الآتية :

3 س (5 س – 3 ع) ؛ (2 س – 3 ص) $\left(\frac{2}{3} + \right.$ ص $\left.\right)$ ؛

$\frac{3}{2}$ س $\left(\frac{5}{4}\right.$ س $+ \frac{2}{7}$ ع $\left.\right)$.

3) حلّل كلاً من المجاميع الآتية إلى جُداء عاملين :

12 س + 6 ع – 15 ؛ 48 س – 8 س ع + 4 س ص .

$\frac{9}{4}$ س² – $\frac{16}{25}$ ؛ 4 س² – 4 س ع + ع² ؛

$\frac{16}{25}$ س² + $\frac{16}{15}$ س ع + $\frac{4}{9}$ ع² .

13. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ك :

أ) **تمهيد** : تا تطبيق من ك إلى ك حيث تا(س) = $\frac{2}{3}$ س – 1

أكمل الجدول الآتي :

س	0	1	1,2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{22}{7}$	3 +
تا(س)	1 –	$-\frac{1}{3}$	...	...	...	...	...

تا(0) = $\frac{2}{3} \times 0 - 1 = -1$ ؛ تا(1) = $\frac{2}{3} \times 1 - 1 = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$.

– 1 هو القيمة العددية للتطبيق تا من أجل س = 0 ؛ $-\frac{1}{3}$ هو القيمة العددية للتطبيق تا من أجل س = 1 .

إنّ صورة كل من الأعداد 0 ، 1 ، 1,2 ، $\frac{1}{3}$ ، $-\frac{5}{6}$ ، $\frac{22}{7}$ ، + 3 بالتطبيق تا تسمى **قيمة عددية** للتطبيق تا .

ب) مفهوم المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ك .

مثال : تا و ها تطبيقان في ك حيث :

تا (س) = 2 س – 1 ؛ ها (س) = 4 س + 5 .

أكمل الجدول الآتي :

س	-1	0	$\frac{1}{2}$	-3	1	2	1,2
تا (س)							
ها (س)							

بصفة عامة تا (س) ≠ ها (س) ؛
ولكن من أجل س = – 3 فإن تا (س) = ها (س) .

• تا (س) = ها (س) تسمى **معادلة في ك** .

العدد الناطق (– 3) يسمى حلاً لهذه المعادلة .

تا (س) = ها (س) ، س ∈ ك

الطرف الأول — الطرف الثاني — س هو المجهول

• في المعادلة : 2 س − 1 = 4 س + 5 أس المجهول س هو 1
فنقول إن هذه المعادلة من **الدرجة الأولى** بمجهول واحد .

حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

مثال : لنحل المعادلة 2 س − 1 = 4 س + 5 .

(2 س − 1 = 4 س + 5) معناه (2 س − 4 س = 5 + 1)
وهذا يعني أن 2 س − 4 س = 6 أي − 2 س = 6 وبقسمة الطرفين على (− 2)

نجد $\frac{-2\text{س}}{-2} = \frac{6}{-2}$ أي **س = − 3**

فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي مج = { − 3 } .
• لاحظ أن مجموعة حلول هذه المعادلة في ص هي أيضا مج = { − 3 }
• لكن هذه المعادلة ليس لها حل في ط ، أي أن مجموعة حلول هذه المعادلة في ط هي ϕ لأن (− 3) ∉ ط .

ملاحظة :

قبل الشروع في حل معادلة يجب تحديد المجموعة التي نحل فيها المعادلة .

1) حل في ك المعادلات الآتية :

$$2\text{س} + 3 = 15 \text{ ؛ } \frac{5}{3}\text{س} - 5 = \frac{2}{3}\text{س} - 1 \text{ ؛ }$$

$$4\text{س} - 3 = 7\text{س} + 12 \text{ ، } \frac{5}{8}\text{س} - \frac{1}{2} = \frac{\text{س}}{4} - 5 .$$

ـ ما هي ـ من بين المعادلات السابقة ـ التي لها حل في ط ؛
والتي لها حل في ص .

2) حل في ك كلاً من المعادلات الآتية :

$$\left|\text{س} - 1\right| = \frac{3}{7} \text{ ؛ } 1 - \text{س} = \frac{3}{7} \text{ ؛ } \left|\text{س} + \frac{2}{5}\right| = 2$$

14. الجذر التربيعي التام لعدد ناطق موجب :

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	15	-6	-7	10	$\frac{3}{2}$	0.25	$+7$	$-3,5$
س^2	225							

بصفة عامة :

لكل عدد ناطق س ، مربع وحيد س^2 هو عدد ناطق موجب .

ـ هل يوجد عدد طبيعي س بحيث $\text{س}^2 = 7056$ ؟

لنحلّل العدد الطبيعي 7056 إلى جُداء عوامل أولية فنجد :

$$7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$$

لاحظ أن أسس العوامل الأولية كلّها زوجية فيمكن أن نكتب

$7056 = (2^2 \times 3 \times 7)^2$

فالعدد الطبيعي الذي نبحث عنه هو س $= 2^2 \times 3 \times 7 = 84$

أي س$^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 84^2$.

نقول إن العدد الطبيعي 84 هو الجذر التربيعي التام للعدد الطبيعي 7056 .

ونكتب : $\sqrt{7056} = 84$.

ونقرأ : الجذر التربيعي للعدد 7056 يساوي 84 .

ملاحظة :

المجموعة م $= \{0 ، 1 ، 4 ، 9 ، 16 ، ..... ن^2 ، ....\}$ (ن ∈ ط) .

هي مجموعة مربعات الأعداد الطبيعية .

يمكننا استعمال جداول خاصة بمربعات الأعداد الطبيعية ، لإيجاد الجذور التربيعية التامة . أو حصر جذر تربيعي بين جذرين تامين متتاليين .

– هل يوجد عدد ناطق س بحيث س$^2 = \frac{49}{25}$ ؟

نعلم أن $\frac{49}{25} = \frac{7^2}{5^2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$. فالعدد $\frac{49}{25}$ هو مربع للعدد الناطق $\frac{7}{5}$.

لاحظ أيضا أن $\frac{49}{25} = \left(-\frac{7}{5}\right)^2$. فالعدد $\frac{49}{25}$ هو أيضا مربع العدد الناطق $-\frac{7}{5}$

• إن **العدد الناطق الموجب** $+\frac{7}{5}$ يسمى الجذر التربيعي التام للعدد الناطق $\frac{49}{25}$.

وتكتب : $\sqrt{\frac{49}{25}} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = +\frac{7}{5}$.

تعريف :

ا عدد ناطق موجب . إذا كان ا مربعًا فإن العدد الناطق الموجب حـ حيث $حـ^2 = ا$ يسمى الجذر التربيعي التام للعدد ا .

نكتب : $حـ = \sqrt{ا}$.

ا عدد ناطق موجب ، حـ عدد **موجب** $حـ = \sqrt{ا}$ معناه $حـ^2 = ا$

ملاحظة :

بما أن $0^2 = 0$ و $1^2 = 1$ فإن $\sqrt{0} = 0$ و $\sqrt{1} = 1$.

ـ هل يوجد عدد ناطق س بحيث $س^2 = \frac{19}{16}$ ؟ لا .

$\frac{19}{16}$ ليس مربعًا لأي عدد ناطق .

1) عيّن ـ من بين الأعداد الطبيعية الآتية ـ الأعداد التي هي مربعات ، ثم عيّن الجذر التربيعي التام لكل من هذه المربعات : 1982 ؛ 8200 ؛ 2646 ؛ 1764 . 2) أوجد الجذر التربيعي التام لكل من الأعداد الناطقة الآتية : $\frac{144}{100}$ ؛ $\frac{81}{121}$ ؛ $\frac{1764}{225}$ ؛ $\frac{729}{784}$.

قضاء عادل

جلس رجلان يتغذيان ، مع أحدهما خمسة أرغفة ، ومع الآخر ثلاثة أرغفة ، فلما وضعا الغداء بين أيديهما مر بهما رجل ، فسلم ، فقالا : اجلس وتغدّ ، فجلس وأكل معهما ، واستووا في أكلهم الأرغفة الثمانية فقام الرجل وطرح إليهما ثمانية دراهم ، وقال : خذاها عوضا مما أكلت لكما ، ونلته من طعامكما ، فتنازعا ، فقال صاحب خمسة الأرغفة : لي خمسة دراهم ، ولك ثلاثة ، وقال صاحب الأرغفة الثلاثة : لا أرضى إلا أن تكون الدراهم بيننا نصفين ، فارتفعا إلى أمير المؤمنين عليّ(ع) فقصّا عليه قصتهما ، فقال لصاحب الثلاثة : قد عرض عليك صاحبك ما عرض ، وخبزه أكثر من خبزك ، فارض بالثلاثة ، فقال : والله لا رضيت عنه إلا بمر الحق ، فقال عليّ : ليس لك في مر الحق إلا درهم واحد ، وله سبعة دراهم ، فقال الرجل : سبحان الله ! قال : هو ذلك ، قال : فعرفني الوجه في مر الحق حتى أقبله ، فقال عليّ : أليس للثمانية الأرغفة أربعة وعشرون ثلثا ؟ أكلتموها وأنتم ثلاثة أنفس ، ولا يعلم الأكثر منكم أكلا ، ولا الأقل ، فتحملون في أكلكم على السواء ، قال : فأكلت أنت ثمانية أثلاث ، وإنما لك تسعة أثلاث ، وأكل صاحبك ثمانية أثلاث ، وله خمسة عشر ثلثا ، أكل منها ثمانية ، وبقي له سبعة أكلها صاحب الدراهم ، وأكل لك واحدا من تسعة ، فلك واحد بواحدك ، وله سبعة ، فقال الرجل : رضيت الآن .

2 مراجعة في الهندسة

1. التعامد والتوازي :

(ق) ، (ك) ، (ل) ، (ف) مستقيمات في المستوي ، حيث :
(ق) // (ك) ؛ (ل) // (ق) ، (ف) ⊥ (ك) .

(ق)
(ك)
(ل)
(ف)

الشكل 1

ـ أكمل الجدول الآتي باستعمال أحد الرمزين // ، ⊥ .

	(ق)	(ك)	(ل)	(ف)
(ق)		//		
(ك)				
(ل)	//			
(ف)		⊥		

2. محور قطعة مستقيمة :

في الشكل 2 : (ق) محور [ا ب] .
الطول ن م يسمى **المسافة** بين النقطة ن والمستقيم

ـ أكمل ما يلي باستعمال أحد الرمزين ≐ ، < مع التعليل .
م ا ... م ب ؛ جـ ا ... جـ ب ؛ د ب ... د ا ؛
ن ا ... ن ب ؛ هـ ا ... هـ ب

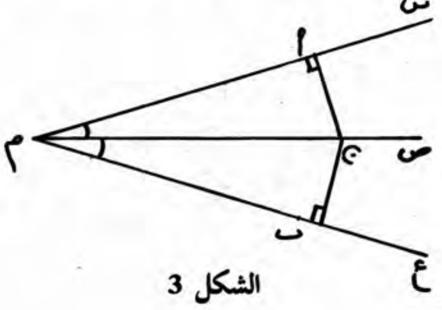
(ق) الشكل 2

تذكّر أن :

محور قطعة مستقيمة هو مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن طرفي هذه القطعة .

3. منّصف زاوية :

في الشكل 3 .
[م ص هو منصف الزاوية [م س ، م ع] ، ن ∈ [م ص ؛
ا ، ب هما المسقطان العموديان للنقطة ن على [م س و [م ع على الترتيب
ـ برهن أن ن ا = ن ب .

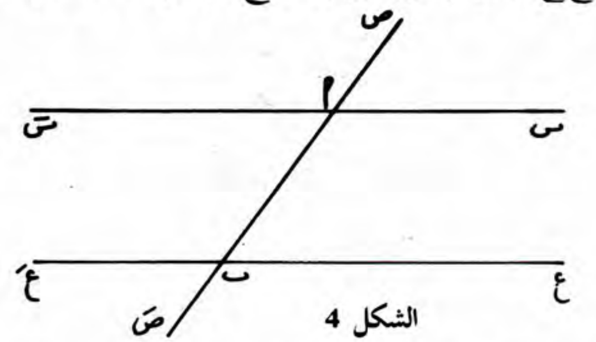


الشكل 3

منّصف زاوية هو مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن ضلعي هذه الزاوية .

4. الزوايا المعينة بمستقيمين متوازيين وقاطع :

(س س') ، (ع ع') ، (ص ص') مستقيمات في المستوي حيث :
(س س') // (ع ع') و (ص ص') قاطع لهما في ا ، ب (الشكل 4)



الشكل 4

علل كلا مما يلي :

$\widehat{\text{ع ب ص}} = \widehat{\text{س ا ص}}$ ؛ $\widehat{\text{ع ب ص'}} = \widehat{\text{س ا ص'}}$ ؛ $\widehat{\text{ع ب ص}} + \widehat{\text{س ا ص'}} = 180°$ ؛

$\widehat{\text{ص ا س}} = \widehat{\text{س' ا ص'}} = \widehat{\text{ص' ب ع'}}$ ؛ $\widehat{\text{ع' ب ص'}} + \widehat{\text{س' ا ص}} = 180°$

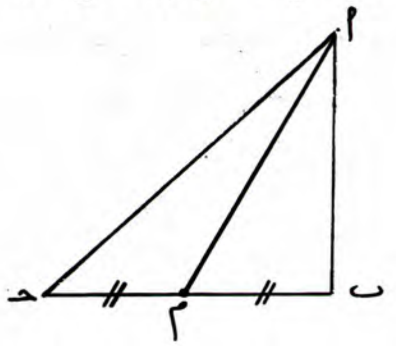
$\widehat{\text{ع' ب ص'}} = \widehat{\text{س ا ص}}$.

لكي يكون : المستقيمان المقطوعان بقاطع متوازيين ، يكفي أن يتحقق أحد الشروط الثلاثة :	**إما** أن تتقايس زاويتان متبادلتان داخليًا أو خارجيًا .
	إما أن تتقايس زاويتان متماثلتان .
	أن تتكامل زاويتان داخليتان أو خارجيتان واقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع .

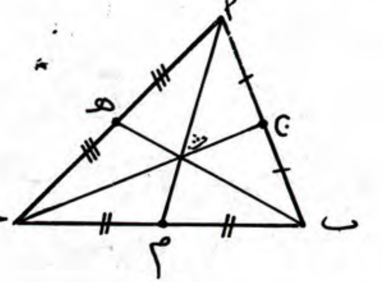
5. المستقيمات الخاصة في مثلث :

أ) متوسطات مثلث :

ا ب ح مثلث ، م منتصف [ب ح] (الشكل 5) .



الشكل 5



الشكل 6

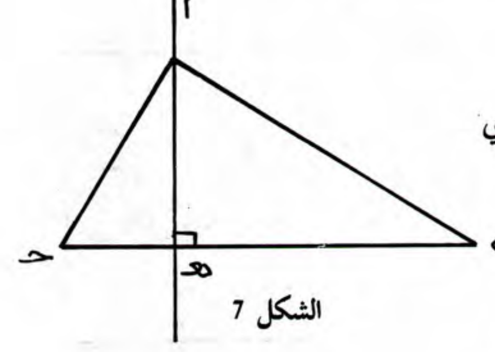
[ا م] هو متوسط للمثلث ا ب ح .

ـ في الشكل 6 [ا م] ، [ب ه] ،
[ح ن] متوسطات المثلث ا ب ح .

• تتقاطع هذه المتوسطات في نقطة واحدة ث تسمى مركز ثقل المثلث .

لدينا : $ا ث = \frac{2}{3} ا م$ ؛ $ب ث = \frac{2}{3} ب ه$ ؛ $ح ث = \frac{2}{3} ح ن$

ب) أعمدة مثلث :



الشكل 7

ا ب ح مثلث حيث ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) (الشكل 7) .

• (اهـ) هو عمود للمثلث ابـحـ .

والطول اهـ هو ارتفاع هذا المثلث المتعلق بالقاعدة [بـحـ] .

• تتقاطع الأعمدة الثلاثة لمثلث في نقطة واحدة .

ـ عيّن نقطة تقاطع أعمدة مثلث قائم .

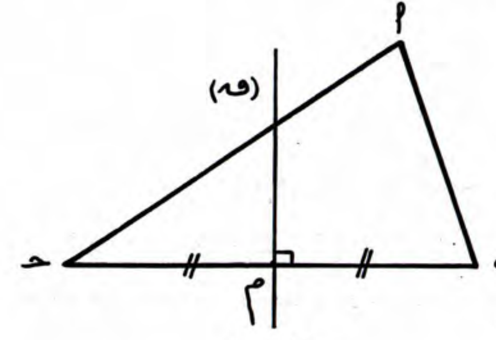
ـ عيّن نقطة تقاطع أعمدة مثلث إحدى زواياه منفرجة .

حـ) محاور مثلث :

ابـحـ مثلث حيث (ق) محور الضلع [بـحـ] (الشكل 8) .

• (ق) هو محور للمثلث ابـحـ .

• تتقاطع المحاور الثلاثة لمثلث في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (الشكل 9) .



الشكل 8

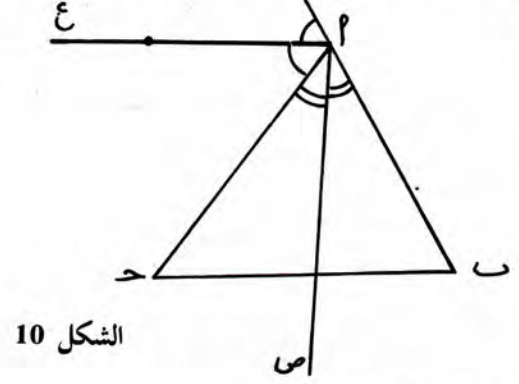


الشكل 9

بيّن أن نقطة تقاطع محاور مثلث قائم هي منتصف وتره

ء) منصفات زوايا مثلث :

أ ب ح مثلث حيث : [أص منصف الزاوية [أب ، أح] ؛ [أع منصف الزاوية الخارجية .



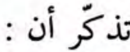
الشكل 10

• [أص منصف داخلي للمثلث أ ب ح .

[أع هو منصف خارجي للمثلث أ ب ح .

• المنصفات الداخلية لمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث والتي تمسّ كل ضلع منه . (الشكل 11) .

الشكل 11



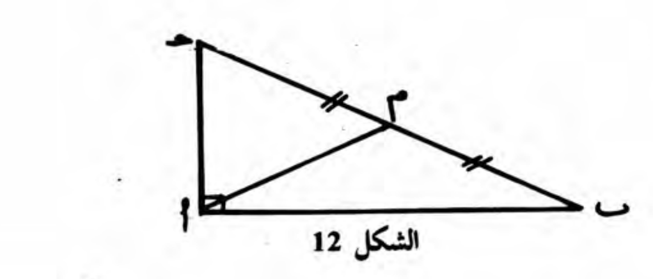
تذكّر أن :

> قيس أي زاوية خارجية بالنسبة إلى مثلث يساوي مجموع قيسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها .

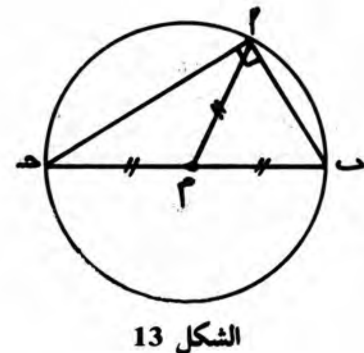
> – بيّن أن حاملي المنصفين الداخلي والخارجي المتعلقين بنفس الرأس متعامدان .

6. المثلث القائم :

ا ب ح مثلث قائم في ا ، [ا م] متوسط متعلق بالوتر [ب ح] ، (الشكل 12) .



الشكل 12



الشكل 13

- لدينا م ا = م ب = م ح أي ا م = $\frac{\text{ب ح}}{2}$
- إذا كان في مثلث :

طول متوسط يساوي نصف طول الضلع المتعلّق به ؛
فإن هذا المثلث قائم ووتره هذا الضلع

الدائرة المحيطة بمثلث قائم :

> الدائرة التي قطرها وتر مثلث قائم هي دائرة محيطة بهذا المثلث

7. المتباينات في مثلث :

(ق) مستقيم ، ن نقطة لا تنتمي إلى (ق) ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة ن على (ق) .

ب ، حـ نقطتان متمايزتان من (ق) تختلفان عن هـ ،
حيث : ن هـ < هـ حـ . و ب تقع بين هـ و حـ
ـ أكمل بأحد الرموز < ، > ، =
ما يلي مع التعليل :

(ق)
ن
حـ ب هـ

الشكل 14

ن هـ ... ن ب ؛ ن ب هـ ... ن هـ ب ؛ حـ ن هـ ... ن حـ هـ ؛
ن ب ... ن حـ ؛ هـ حـ ... هـ ب ؛ ن هـ + هـ ب ... ن ب
ن ب ... هـ ب − هـ ن ؛ هـ ب − هـ ن ... ن ب ... هـ ب + هـ ن .
ن ب حـ ... ن هـ ب + هـ ن ب ؛ ن ب هـ ... ن حـ هـ .

تذكّر أن :

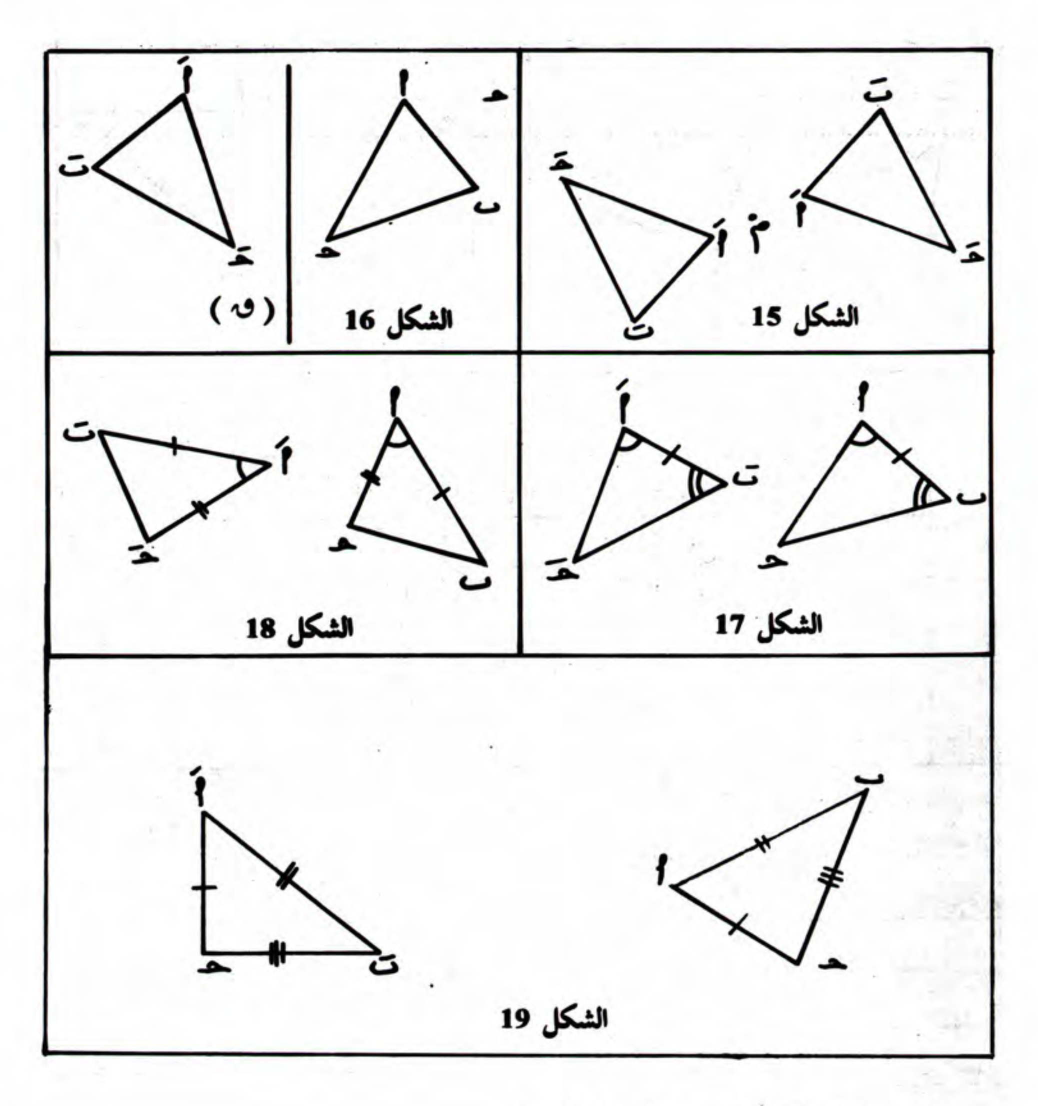
> الضلع الأطول في مثلث يقابل الزاوية الأوسع ، والزاوية الأوسع تقابل الضلع الأطول .

8. المثلثات المتقايسة :

تذكّر أنه :

ـ يتقايس المثلثان ا ب حـ ، ا' ب' حـ' في كل حالة من الحالات الآتية :

1) ا ب حـ ، ا' ب' حـ' متناظران بالنسبة إلى النقطة م . (الشكل 15)
2) ا ب حـ ، ا' ب' حـ' متناظران بالنسبة إلى مستقيم (ق) ، (الشكل 16)
3) ا ب = ا' ب' ، $\hat{ا} = \hat{ا'}$ ، $\hat{ب} = \hat{ب'}$. (الشكل 17)
4) ا ب = ا' ب' ، ا حـ = ا' حـ' ، $\hat{ا} = \hat{ا'}$. (الشكل 18)
5) ا ب = ا' ب' ، ا حـ = ا' حـ' ، ب حـ = ب' حـ' (الشكل 19)



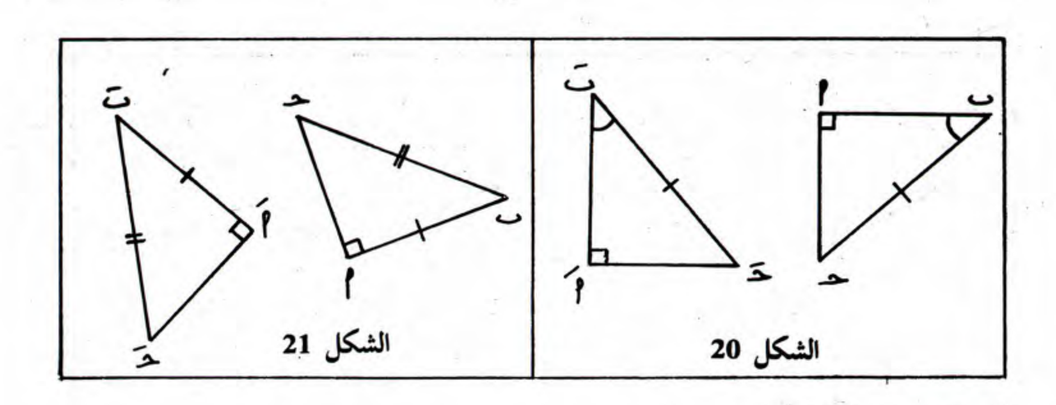
الشكل 15 — الشكل 16 — الشكل 17 — الشكل 18 — الشكل 19

• حالات خاصة بتقايس مثلثين قائمين :

ـ يتقايس المثلثان ا ب حـ ، ا' ب' حـ' القائمان في ا ، ا' على الترتيب في كل من الحالتين الآتيتين :

1) ب حـ = ب' حـ' ، $\widehat{ب} = \widehat{ب'}$.

2) ب حـ = ب' حـ' ، ا ب = ا' ب' .



الشكل 21 الشكل 20

إذا كان الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع

	خواص الأضلاع	خواص الزوايا	خواص القطرين	التناظر
فإن	أ د = ب ج أ ب = د ج	أ̂ = ج̂ ب̂ = د̂ أ̂ + ب̂ = أ̂ + د̂ = 180° ب̂ + أ̂ = ب̂ + ج̂ = 180° ج̂ + ب̂ = ج̂ + د̂ = 180° د̂ + ج̂ = د̂ + أ̂ = 180°	م أ = م ج م ب = م د	م نقطة تقاطع القطرين هي مركز تناظر لمتوازي الأضلاع أ ب ج د .

إذا كان في رباعي	فإن هذا الرباعي
• كل ضلعين متقابلين متقايسين أو • كل ضلعين متقابلين حامليهما متوازيين أو • ضلعان متقابلان متقايسين وحاملاهما متوازيين أو • كل زاويتين متقابلتين متقايستين . أو • زاوية تكمل الزاويتين المتتاليتين معها . أو • القطران متناصفين .	متوازي أضلاع

ملاحظة :

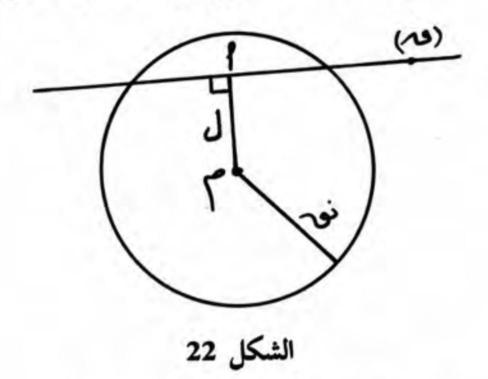
كل من المعيّن والمستطيل والمربع هو متوازي أضلاع خاص.

- اذكر خواص أضلاع وقطري المعيّن .
- اذكر خواص أضلاع وزوايا وقطري كل من المستطيل والمربع .
- اذكر عناصر التناظر في كل من المعيّن والمستطيل والمربع .

10. الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة :

د (م ، ر) دائرة ، (ق) مستقيم ، نسمي ل المسافة بين المركز م والمستقيم (ق) .

- إذا كان ل < ر فإن (ق) قاطع للدائرة (الشكل 22)
- إذا كان ل = ر فإن (ق) مماس للدائرة (الشكل 23)

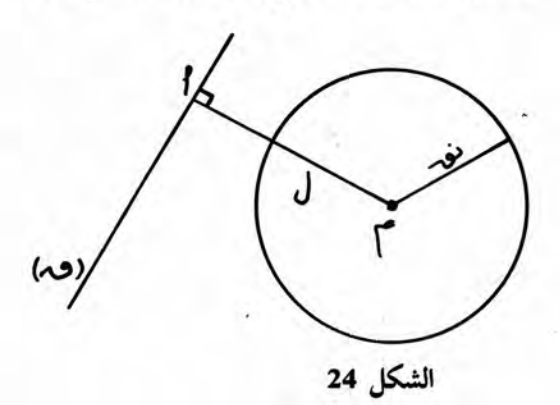


الشكل 22



الشكل 23

- إذا كان ل > ر فإن (ق) خارجي بالنسبة للدائرة (الشكل 24) .



الشكل 24

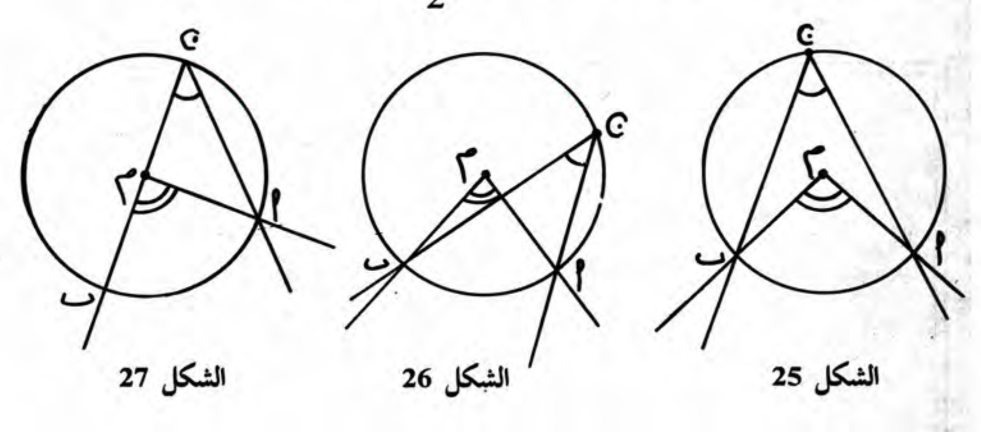
تذكّر أن :

> [(ق) مماس للدائرة د (م ، ر) في النقطة أ] معناه
> [(ق) ⊥ (م أ) و م أ = ر]

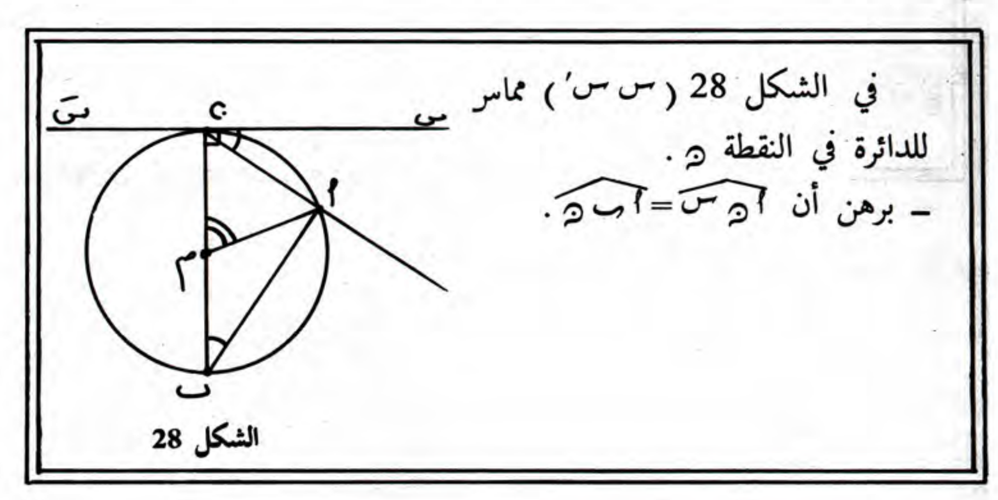
11. الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة :

تذكّر أن : قيس الزاوية المحيطية يساوي نصف قيس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس.

في كل من الأشكال الآتية لدينا : $\hat{ه} = \frac{1}{2} \hat{أمب}$.



الشكل 25 الشكل 26 الشكل 27



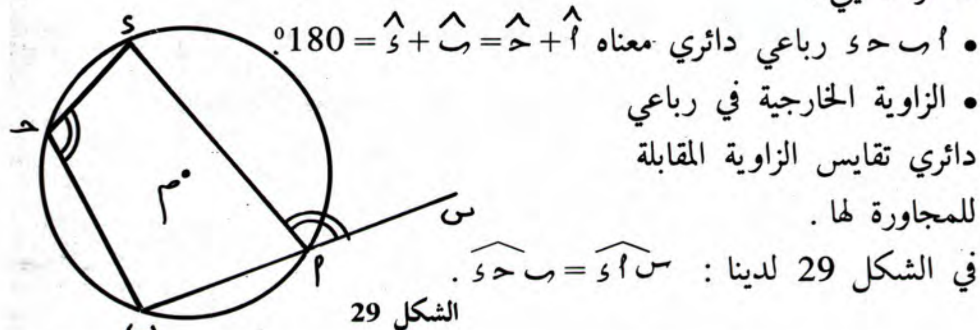
الشكل 28

في الشكل 28 (س سَ) مماس للدائرة في النقطة ه .

ـ برهن أن $\widehat{أهس} = \widehat{أبه}$.

1. الرباعي الدائري :

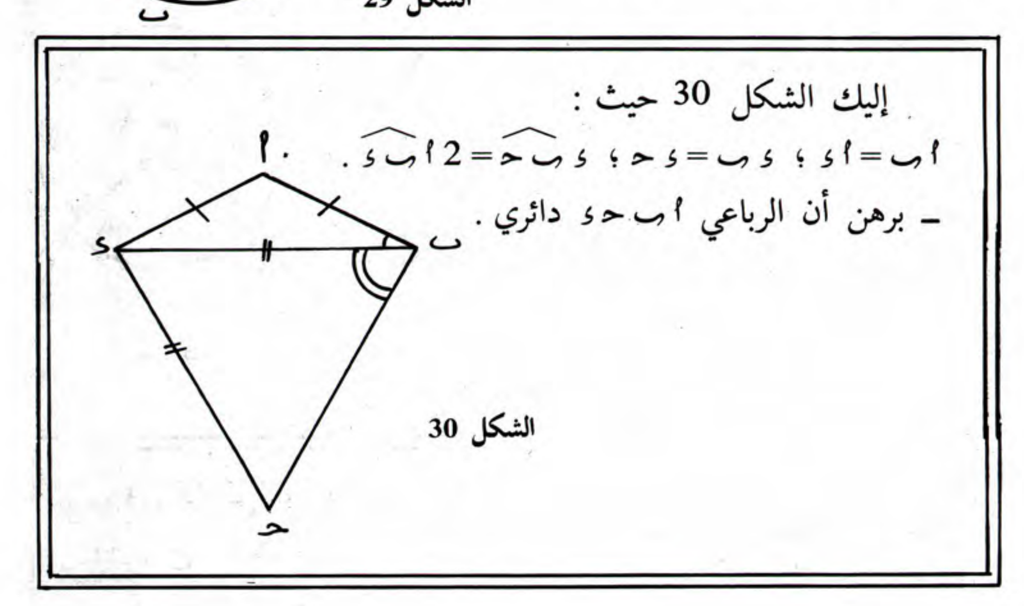
تذكّر ما يلي :



- ا ب ح ء رباعي دائري معناه $\widehat{أ} + \widehat{ح} = \widehat{ب} + \widehat{ء} = 180^\circ$.
- الزاوية الخارجية في رباعي دائري تقايس الزاوية المقابلة للمجاورة لها .

في الشكل 29 لدينا : $\widehat{س أ ء} = \widehat{ب ح ء}$.

الشكل 29



إليك الشكل 30 حيث :

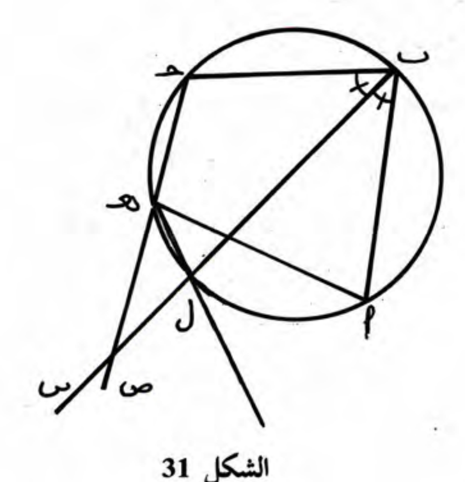
ا ب = ا ء ؛ ء ب = ء ح ؛ $\widehat{ء ب ح} = 2\,\widehat{ا ب ء}$.

- برهن أن الرباعي ا ب ح ء دائري .

الشكل 30

تمرين محلول :

ى (م ، ىر) دائرة ؛ ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من هذه الدائرة ؛
المنصف [ب س للزاوية [ب ا ، ب حـ] يقطع الدائرة (ى) في ل ؛
هـ نقطة من القوس حـل . [حـ ص نصف مستقيم يشمل هـ .
– برهن أن [هـ ل هو منصف [هـ ا ، هـ ص] .



الشكل 31

المعطيات :

ا ب حـ هـ رباعي دائري
[ب س منصف [ب ا ، ب حـ] .
[ب س ∩ (ى) = { ل } .

المطلوب :
إثبات أن : [هـ ل منصف [هـ ا ، هـ ص] .

البرهان :
– بما أن الزاوية [هـ ل ، هـ ص] خارجية بالنسبة للرباعي الدائرى ل ب حـ هـ
إذن ل هـ̂ ص = ل ب̂ حـ (نظرية)
وبما أن ل ب̂ حـ = ل ب̂ ا (لأن [ب س منصف [ب ا ، ب حـ]) .
فإن ل هـ̂ ص = ل ب̂ ا .....(1)
– والزاويتان [ب ا ، ب ل] ، [هـ ا ، هـ ل] تحصران نفس القوس ال فهما متقايستان (نظرية) .
أي ل ب̂ ا = ل هـ̂ ا ....(2)
من (1) ؛ (2) نستنتج أن ا هـ̂ ل = ل هـ̂ ص .
الزاويتان [هـ ا ، هـ ل] ؛ [هـ ل ، هـ ص] متجاورتان ومتقايستان
إذن [هـ ل هو منصف [هـ ا ، هـ ص] . وهو المطلوب

3 مجموعة الأعداد الحقيقية : العمليات والترتيب في ع

مجموعة الأعداد الحقيقية ع

مقدمة :

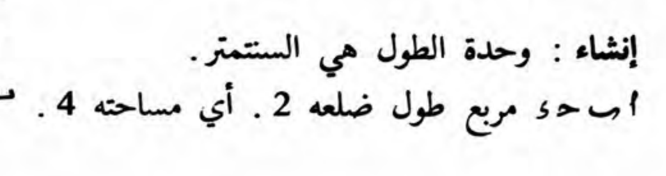
كل عدد ناطق موجب يمكن استعماله للتعبير عن أقياس مختلفة (طول قطعة ، قيس زاوية ، مساحة مضلع أو قرص ، حجم جسم ، ....) لكن لا يمكن التعبير عن كل الأقياس بأعداد ناطقة . وأيضا لا يمكن حل كثير من المعادلات في ك . لذلك برزت فكرة توسيع المجموعة ك إلى مجموعة أخرى ، كما وسعنا المجموعة ط إلى ص ثم وسعنا ص إلى ك .

1. العدد الأصم :

★ المثال الآتي يبيّن وجود مربع مساحته 2 ، مع أن طول ضلع هذا المربع ليس عددًا ناطقًا .

إنشاء : وحدة الطول هي السنتمتر.

ا ب ح د مربع طول ضلعه 2 . أي مساحته 4 .



الشكل 1

النقط م ، ن ، ه ، ل هي منتصفات أضلاعه (الشكل 1)

نحصل بهذا الإنشاء على المربع م ن ه ل الذي مساحته تساوي نصف مساحة المربع ا ب ح د . أي مساحته تساوي 2 (لماذا ؟) .

نسمي س طول ضلع المربع م ن ه ل فيكون :

س × س = 2 أي **س² = 2 .**

لكن لا يوجد عدد ناطق مربعه 2 (يمكن البرهان على ذلك مستقبلا) .

بما أن المربع م ن هـ ل الذي مساحته 2 موجود فعلاً ، فإن طول ضلعه الذي سميناه س موجود أيضا . نقبل أنه عدد ينتمي إلى مجموعة أخرى منفصلة عن المجموعة ك تسمى **مجموعة الأعداد الصماء** . فالعدد س الذي مربعه 2 هو عدد أصمّ . نرمز له بالرمز $\sqrt{2}$ ونكتب : س $= \sqrt{2}$.

جرت محاولات عديدة لإعطاء قيم تقريبية أدق أكثر فأكثر للعدد الأصم $\sqrt{2}$.
مثلا :

- الأعداد : 1 ؛ 1,4 ؛ 1,41 ؛ 1,414 ؛ 1,4142 هي قيم مقربة بالنقصان للعدد الأصم $\sqrt{2}$.
- الأعداد : 2 ؛ 1,5 ؛ 1,42 ؛ 1,415 ؛ 1,4143 هي قيم مقربة بالزيادة للعدد $\sqrt{2}$.

كل من : $\sqrt{3}$ ؛ π ؛ $\sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{6}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ؛ $\sqrt{\frac{18}{15}}$ ؛ $\sqrt{1,5}$ هو عدد أصم .

نستعمل أحيانا في الحسابات قيما تقريبية للأعداد الصماء . فمثلا نستعمل في حساب طول دائرة أو مساحة قرص ، العدد الأصم π الذي نعوضه بأحد العددين الناطقين $\frac{22}{7}$ و 3,14 باعتبارهما قيمتين تقريبيتين للعدد π .

توجد قيم تقريبية أخرى أقرب فأقرب للقيمة الحقيقية للعدد π مثل القيم : 3,141 ؛ 3,1415 ؛ 3,14159 التي رأيتها في الصفحة الخاصة بالعدد π في كتاب السنة السابعة .

2. مجموعة الأعداد الحقيقية ح :

إذا رمزنا لمجموعة الأعداد الصماء بالرمز أ مثلا ، فإن المجموعة ك $\cup$ أ هي أوسع من ك ومن أ ، تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بالرمز ح .

أي : ح = ك $\cup$ أ

ملاحظات :

1) المجموعة ح أوسع من كل المجموعات العددية السابقة فهي غير منتهية .

ط ⊂ ص ⊂ ك ⊂ ح

2) كل عدد حقيقي هو إما ناطق وإما أصمّ . أي :

ك ∩ أ = φ .

3. تمثيل المجموعة ح :

نمثل المجموعة ح بمستقيم موجه (س س′) ، حيث م نقطة كيفية منه (الشكل 2)



الشكل 2

نصطلح على ما يلي :

1) إذا كانت هـ نقطة من [م س تختلف عن النقطة م ، فإن الإتجاه من م نحو هـ **الإتجاه الموجب** للمستقيم (س س′) ، والإتجاه المعاكس هو **الإتجاه السالب** .

2) النقطة م تمثل العدد الحقيقي المعدوم 0 .

3) كل نقطة من [م س تختلف عن م تمثل **عددا حقيقيًا موجبًا** .

4) كل نقطة من [م س′ تختلف عن م تمثل **عددًا حقيقيًا سالبًا** .

نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة أو المعدومة بالرمز $ح^+$.

ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة أو المعدومة بالرمز $ح^-$.

ويكون : $ح^+ \cup ح^- = ح$ ؛ $ح^+ \cap ح^- = \{0\}$

ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة بالرمز $ح^*$.

أمثلة :

• كل من $\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{3}$ ؛ $\frac{17}{10}$ ؛ π ، $1,41$ ؛ هو عدد حقيقي موجب .

• كل من $-\sqrt{7}$ ؛ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $-\frac{22}{7}$ ؛ $-0,66$ ؛ $-\frac{\pi}{3}$ هو عدد حقيقي سالب .

ملاحظة 1) إذا كان العددان الحقيقيان ا ، ب ينتميان إلى نفس المجموعة ح$^{+}$ أو ح$^{-}$ فنقول إنهما من نفس الإشارة .

ملاحظة 2) كل عدد حقيقي (ناطق أو أصم) يمكن تمثيله بنقطة على مستقيم موجه . بينما يوجد عدد غير منته من نقط مستقيم موجه لا تمثل أي عدد ناطق .

★ نقبل أن كل نقطة من مستقيم موجه تمثل عددًا حقيقيًا .

هذا يعني أنه :

« يوجد تطبيق تقابلي بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة نقط مستقيم موجه » .

القيمة المطلقة لعدد حقيقي :

تعريف :

القيمة المطلقة لعدد حقيقي غير معدوم س ، هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز إليه بالرمز | س | ونعرفه كما يلي :

| س | = + س ، إذا كان س موجباً .

| س | = − س ، إذا كان س سالباً .

$|0| = 0$

أمثلة : $\left|-\frac{13}{6}\right| = -\left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{13}{6}$.

$|-5,7| = -(-5,7) = 5,7$.

$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\left|-\sqrt{\frac{7}{5}}\right| = -\left(-\sqrt{\frac{7}{5}}\right) = \sqrt{\frac{7}{5}}$.

ملاحظة 1) لكل عدد حقيقي غير معدوم **إشارة** (إما + وإما −) **وقيمة مطلقة** .

ملاحظة 2)

- إذا كان أ عددًا حقيقيًا موجبًا فإن $-\text{أ}$ هو عدد حقيقي سالب
- وإذا كان أ عددًا حقيقيًا سالبًا فإن $-\text{أ}$ هو عدد حقيقي موجب .

كل من العددين الحقيقين أ ، $-\text{أ}$ هو معاكس الآخر

أي أن أ ، $-\text{أ}$ متعاكسان .

ويكون :

$|-\text{أ}| = |\text{أ}|$.

$-(-\text{أ}) = \text{أ}$.

مثال :

إذا كان $\text{أ} = 3,14$ فإن $-\text{أ} = -3,14$ و $|-3,14| = |3,14| = 3,14$.

إذا كان $\text{أ} = -\sqrt{3}$ فإن $-\text{أ} = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ و $|-\sqrt{3}| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

العمليات في ح

1. تعريف :

كل العمليات التي عرفناها في المجموعة ك وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة ، يمكننا أن نعرفها في المجموعة ح أيضا .

أي أنه مهما يكن العددان الحقيقيان أ ، ب فيمكننا أن نعرف مجموعهما $\text{أ} + \text{ب}$ ، وفرقهما $\text{أ} - \text{ب}$ ، وجداءهما $\text{أ} \times \text{ب}$ أي $\text{أ} . \text{ب}$ وحاصل القسمة $\text{أ} : \text{ب}$ إذا كان $\text{ب} \neq 0$.

فيكون كل من $أ + ب$ ؛ $أ - ب$ ؛ $أ . ب$ ؛ $\frac{أ}{ب}$ (مع $ب \neq 0$) عددًا حقيقيًا وحيدًا .

أمثلة : كل من : $1 + \sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{7} - \sqrt{8}$ ؛ $2 \times \sqrt{3}$ ؛ $7 \div \sqrt{\frac{2}{3}}$ ؛ $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{7}$ هوعددحقيقي .

2. خواص :

نقبل أن خواص العمليات التي درسناها في ك يمكن تعميمها في المجموعة ح .

1) خواص الجمع في ح :

- **التبديل** : مهما يكن العددان الحيقيان أ ، ب فإن : $أ + ب = ب + أ$.
- **التجميع** : مهما تكن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ فإن :
  $(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ)$.
- **العنصر الحيادي** : مهما يكن العدد الحقيقي أ فإن : $أ + 0 = 0 + أ = أ$
  العدد 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى الجمع في ح .
- **العنصر النظير**: مهما يكن العدد الحقيقي أ فإن
  $أ + (-أ) = (-أ) + أ = 0$
  أي لكل عدد حقيقي أ نظير وحيد بالنسبة إلى عملية الجمع في ح هو معاكسه $-أ$

ملاحظة : مهما يكن العددان الحقيقيان أ ، ب فإن :

$$-(أ+ب) = -أ + (-ب)$$

أي أن معاكس مجموع هو مجموع المعاكسين.

2) خواص الضرب في ح :

- **التبديل** : مهما يكن العددان الحقيقيان أ ، ب فإن : أ . ب = ب . أ .
- **التجميع** : مهما تكن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ فإن :
  (أ . ب) . حـ = أ . (ب . حـ) .
- **العنصر الحيادي** : مهما يكن العدد الحقيقي أ فإن : أ × 1 = 1 × أ = أ .
  العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى الضرب في ح .
- **العنصر النظير** : مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم أ ، فإنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم وحيد أ′ بحيث :
  أ × أ′ = أ′ × أ = 1 .

  نرمز للعدد أ′ بالرمز $\frac{1}{أ}$ ونسميه مقلوب أ فيكون :

  $$أ \times \frac{1}{أ} = \frac{1}{أ} \times أ = 1$$

- **الضرب توزيعي بالنسبة إلى الجمع** ، أي :
  مهما تكن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ فإن : أ (ب + حـ) = أب + أحـ .

ملاحظة 1) مهما يكن العددان الحقيقيان أ ، ب فإن :

أ . (− ب) = (− أ) . ب = − أ . ب ؛ (− أ) . (− ب) = أ ب

أ . (− 1) = − أ .

ملاحظة 2) (ا . ب = 0) معناه (ا = 0 أو ب = 0)

ملاحظة 3) مهما تكن الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ فإن :

(ا + ب) (حـ + ء) = ا حـ + ا ء + ب حـ + ب ء .

احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

$\left(\frac{3}{7}-\right)\times\left(\frac{5}{9}-\right)\times\frac{42}{15}$ ؛ $\left(\frac{11}{32}-\right)\times\left(\frac{18}{14}-\frac{70}{56}\right)$.

3) خواص الطرح في ح :

- مهما يكن العدد الحقيقي ا ، فإن ا − ا = 0 ؛ 0 − ا = − ا .
- الضرب توزيعي بالنسبة إلى الطرح ، أي :

مهما تكن الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ فإن : ا . (ب − حـ) = ا ب − ا حـ .

ملاحظة 1) مهما يكن العددان الحقيقيان ا ، ب فإن :

− (ا − ب) = − ا − (− ب) = − ا + ب = ب − ا .

أي أن معاكس (ا − ب) هو العدد ب − ا .

ملاحظة 2) مهما تكن الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ فإن :

- ا + (ب − حـ) = (ا + ب) − حـ = (ا − حـ) + ب .
- ا − (ب + حـ) = (ا − ب) − حـ = (ا − حـ) − ب .
- ا − (ب − حـ) = (ا − ب) + حـ = (ا + حـ) − ب .

ملاحظة 3) مهما تكن الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ ، ء فإن :

- (ا + ب) (حـ − ء) = ا حـ − ا ء + ب حـ − ب ء .
- (ا − ب) . (حـ − ء) = ا حـ − ا ء − ب حـ + ب ء .

4) القسمة في ح :

1) حاصل قسمة عدد حقيقي أ على عدد حقيقي غير معدوم ب هو العدد الحقيقي الوحيد حـ بحيث $\text{ب} \times \text{حـ} = \text{أ}$.

نكتب $\text{حـ} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

نقول إن العدد الحقيقي $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ هو نسبة العدد الحقيقي أ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم ب.

أ هو بسط النسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، ب هو مقامها .

$\text{حـ} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ **معناه** $\text{حـ} \times \text{ب} = \text{أ}$

2) خواص :

مهما تكن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ ، د (مع $\text{ب} \neq 0$ ، $\text{د} \neq 0$) فإن :

- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أد} + \text{ب حـ}}{\text{ب د}}$.
- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أد} - \text{ب حـ}}{\text{ب د}}$.
- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ب د}}$.
- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{حـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{ب حـ}}$ (مع $\text{حـ} \neq 0$) .

ملاحظة 1) $\frac{ا}{ب} = ا \times \frac{1}{ب}$ (مع ب $\neq 0$) .

$\frac{ا}{ا} = 1$ (مع ا $\neq 0$) ؛ $\frac{0}{ب} = 0$ (مع ب $\neq 0$) .

ملاحظة 2) ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية حيث ب $\neq 0$.

- $\frac{ا}{ب} + \frac{حـ}{ب} = \frac{ا + حـ}{ب}$ ؛ $\frac{ا}{ب} - \frac{حـ}{ب} = \frac{ا - حـ}{ب}$.
- $\frac{ا}{ب} \div \frac{حـ}{ب} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{حـ} = \frac{ا}{حـ}$ (مع حـ $\neq 0$) .

3) تساوي نسبتين :

مسألة : ا ، ب ، حـ ، ى أعداد حقيقية بحيث ب ، ى غير معدومين

$\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{حـ}{ى}$ نسبتان متساويتان أي $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ى}$.

لنبرهن أن ا ى = ب حـ .

البرهان :

لدينا $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ى}$ ، نسمي س القيمة المشتركة للنسبتين $\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{حـ}{ى}$.

- نعلم أن : $\frac{ا}{ب} = $ س معناه ا = ب × س

وأن ا = ب × س معناه ا × ى = (ب س) × ى (ى $\neq 0$) .

• ونعلم أيضا أن : $\frac{ج}{د} = س$ معناه $ج = د \times س$

وأن $ج = د\, س$ معناه $ب \times ج = ب \times (د\, س)$ $(ب \neq 0)$.

وبما أن $(ب\, س) . د = ب\, (د\, س)$

إذن $أ\, د = ب\, ج$

نظرية :

> أ ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية حيث $ب \neq 0$ ، $د \neq 0$.
>
> إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن $أ\, د = ب\, ج$

برهن على **النظرية** الآتية :

> أ ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية حيث $ب \neq 0$ ، $د \neq 0$.
>
> إذا كان $أ\, د = ب\, ج$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$.

من (1) و (2) نستنتج **النظرية الآتية** :

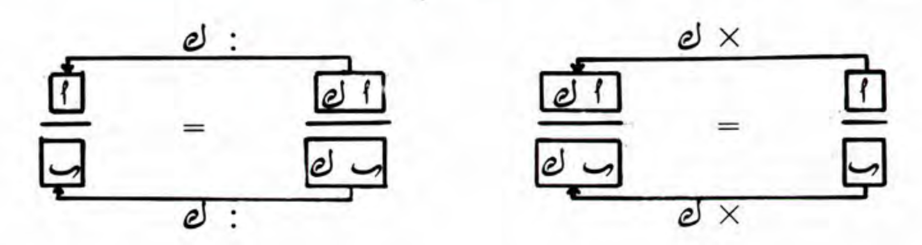
> $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ نسبتان .
>
> $\left(\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}\right)$ معناه $(أ\, د = ب\, ج)$

نتيجة :

$\frac{أ}{ب}$ نسبة معلومة . ك عدد حقيقي غير معدوم

$$\frac{أ}{ب} = \frac{أ ك}{ب ك}$$

يمكن أن نعبر عن هذه النتيجة بالمخطط الآتي :



1) إليك النسبة $\frac{12}{15}$ أوجد أربع نسب مساوية لها .

2) اكتب ثلاث نسب كل منها تساوي النسبة $\frac{\sqrt{8}}{7}$.

تطبيقات على العمليات في ح

1. قوة عدد حقيقي .

1) القوة التي أسها عدد طبيعي .

إذا كان س عددًا حقيقيًا غير معدوم و ن عددًا طبيعيًا فالجداء .

$\underbrace{س \times س \times \ldots\ldots \times س}_{ن \text{ عاملا}}$ يسمى **القوة النونية للعدد الحقيقي** س ونرمز لها بالرمز

$س^ن$ ونقرأ « س أسّ ن ».

نكتب : $س^ن = \underbrace{س \times س \times .... \times س}_{ن \text{ عاملا}}$

تعريف :

القوة النونية للعدد الحقيقي س هي جداء ن عاملا كل عامل يساوي س

ملاحظة 1) : $س^1 = س$.

$س^2 = س \times س$ ويسمى مربع س .

$س^3 = س \times س \times س$ ويسمى مكعب س .

ملاحظة 2) : $س^0 = 1$ ($س \neq 0$)

2) القوة التي أسها عدد صحيح سالب :

تعلم أنه إذا كان س عددًا ناطقًا غير معدوم و ن عددًا صحيحًا فإن

$$س^{-ن} = \frac{1}{س^ن}$$

بصفة عامة :

نقبل أنه إذا كان س عددًا حقيقيًا غير معدوم و ن عددًا طبيعيًا فإن :

$$س^{-ن} = \frac{1}{س^ن} .$$

أي أن $س^{-ن}$ هو مقلوب $س^ن$.

أمثلة :

$$س^{-1} = \frac{1}{س} \text{ ؛ } س^{-2} = \frac{1}{س^2} \text{ ؛ } س^{-3} = \frac{1}{س^3} .$$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$ ؛ $10^{-2} = \frac{1}{10^{2}}$ ؛ $10^{-5} = \frac{1}{10^{5}}$.

$(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $(\sqrt{2})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{3}}$

$(-\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(-\sqrt{3})^{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{2}}$ ؛ $(-\sqrt{3})^{-5} = \frac{1}{(-\sqrt{3})^{5}}$

3) خواص :

- مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم ا . ومهما يكن العددان الصحيحان ن . م فإن :

$ا^{ن} \times ا^{م} = ا^{ن+م}$ ؛ $ا^{ن} \div ا^{م} = ا^{ن-م}$

- مهما يكن العددان الحقيقيان غير المعدومين ا . ب . ومهما يكن العدد الصحيح ن فإن :

$ا^{ن} \times ب^{ن} = (ا ب)^{ن}$

2. المجموع الجبري في ح :

أمثلة : س ، ع ، ص أعداد حقيقية .

كل من : 2 س $+ 3$ ع $-$ ص ؛ $-\frac{3}{2}$ س$^{2} + \sqrt{2}$ ص ؛ -5 ع $+ 3$ ص $- \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛

15 س ع $- \sqrt{7}$ ص . هو مجموع جبري في ح .

تعريف :

> س ، ع عددان حقيقيان .
> - إذا كان « س > ع أو س = ع » فنقول إن س أكبر من ع أو يساويه ونكتب س ≥ ع .
> - إذا كان « س < ع أو س = ع » فنقول إن س أصغر من ع أو يساويه ونكتب س ≤ ع

كل من العلاقتين « .... ≥ .... » و « .... ≤ .... » تسمى علاقة ترتيب في ح.

ملاحظات :

1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب ا فإن ا ≥ 0 .
2) مهما يكن العدد الحقيقي السالب ب فإن ب ≤ 0 .
3) إذا كان ا عددًا حقيقيًا موجبًا و ب عددًا حقيقيًا سالبًا فإن ا ≥ ب .

3) خواص :

س ، ع ، ص أعداد حقيقية .

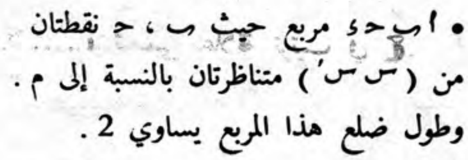
1) إذا كان س > ع و ع > ص فإن : س > ص .
   وإذا كان س < ع و ع < ص فإن : س < ص .
2) إذا كان س ≥ ع و ع ≥ ص فإن : س ≥ ص .
   وإذا كان س ≤ ع و ع ≤ ص فإن : س ≤ ص .
3) إذا كان س ≤ ع فإن : س + ص ≤ ع + ص .
   وإذا كان س + ص ≤ ع + ص فإن : س ≤ ع .
4) إذا كان س ≥ ع و ص ≥ 0 فإن : س ص ≥ ع ص .
   وإذا كان س ≥ ع و ص ≤ 0 فإن : س ص ≤ ع ص .

بين أنه 1) إذا كان س ص ⩽ ع ص وكان ص > 0 فإن : س ⩽ ع .
2) إذا كان ا ⩽ ب و حـ ⩽ د فإن ا + حـ ⩽ ب + د

تمرين محلول : تمثيل العدد الحقيقي الأصم $\sqrt{2}$ على مستقيم موجّه .

لاحظ الشكل 3 حيث :

• (س سَ) مستقيم موجّه
والنقطة م تمثل العدد الحقيقي 0 .



الشكل 3

• ا ب حـ د مربع حيث ب ، حـ نقطتان من (س سَ) متناظرتان بالنسبة إلى م .
وطول ضلع هذا المربع يساوي 2 .

• النقط ج ، م ، و ، هـ هي منتصفات الأضلاع [ا ب] ، [ب حـ] ، [حـ د] ، [ا د] ، على الترتيب .

نجد أن م ج = $\sqrt{2}$. (حسب الفقرة 1) .

لنرسم دائرة مركزها م ونصف قطرها م ج أي $\sqrt{2}$.

هذه الدائرة تقطع [م س في نقطةٍ ي ، وتقطع [م سَ في النقطة يَ نظيرة ي بالنسبة إلى م .

فيكون م ي = م ج = $\sqrt{2}$. (نصفا قطرين لنفس الدائرة) .

النقطة ي تمثل العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{2}$ على المستقيم الموجه (س سَ) .

والنقطة يَ تمثل العدد الحقيقي السالب ($-\sqrt{2}$) على المستقيم (س سَ) .

لاحظ أن م ب = 1 وأن م ب > م ي .

إذن $1 < \sqrt{2}$

يمكن أن نستنتج أن $1 < \sqrt{2} < 2$

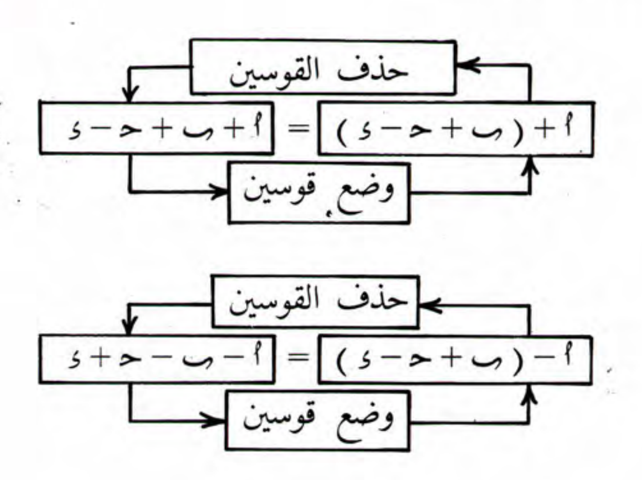
• فالعدد الأصم $\sqrt{2}$ محصور بين العددين الناطقين 1 و 2 .

• توجد حصور أخرى للعدد $\sqrt{2}$ بين أعداد ناطقة أدق من هذا الحصر مثلاً .

$2 > 1.5 > 1.42 > 1,415 > 1,4143 > \sqrt{2} > 1,4142 > 1,414 > 1,41 > 1,4 > 1$

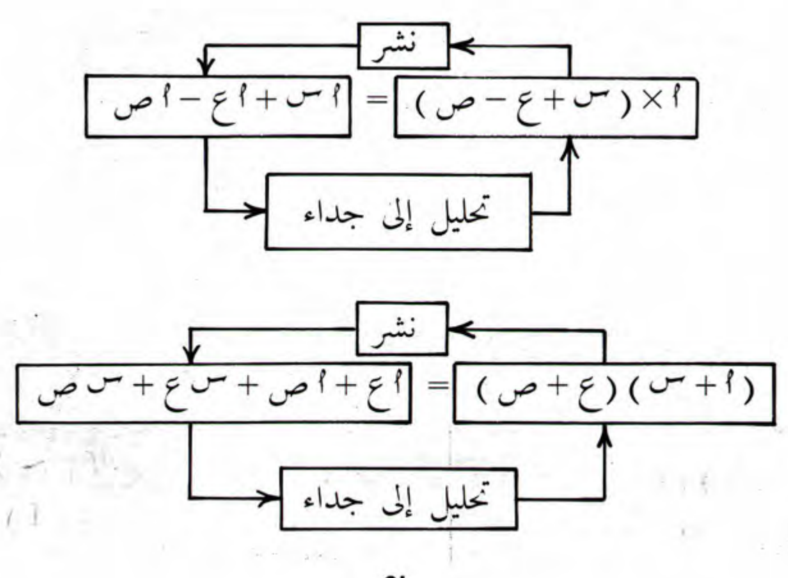
1) **قاعدة حذف أو وضع الأقواس :**

أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية :



2) **النشر والتحليل :**

أ ، س ، ع ، ص أعداد حقيقية .



3) الجداءات الشهيرة

مهما يكن العددان الحقيقيان س ، ع فإن :

$(س + ع)^2 = س^2 + 2 س ع + ع^2$.

$(س - ع)^2 = س^2 - 2 س ع + ع^2$.

$(س - ع)(س + ع) = س^2 - ع^2$

الترتيب في ح

1) العلاقتان « .... > .... » و « .... < .... » في ح .

تعريف :

> س ، ع عددان حقيقيان .
>
> • نقول إن س أكبر من ع ونكتب $س > ع$ إذا كان الفرق $س - ع$ عددًا حقيقيًا موجبًا .
>
> • ونقول إن س أصغر من ع ونكتب $س < ع$ إذا كان الفرق $س - ع$ عددًا حقيقيًا سالبًا .

• مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان س و ع فيمكن مقارنتهما بإحدى العلاقتين :
« ...... > ...... » أو « .... < .... »
ونحصل على إحدى المتباينتين $س > ع$ أو $س < ع$.

2) العلاقتان « .... ≤ .... » و « .... ≥ .... » في ح .

مهما يكن العددان الحقيقيان س ، ع فيمكن مقارنتهما باستخدام إحدى العلاقات :
« .... > .... » أو « .... < .... » أو « .... = ... »
فيكون إما $س > ع$ وإما $س < ع$ وإما $س = ع$.



1. ا ب حـ ء مربع طول ضلعه 4 سم . منتصفات أضلاعه هي و ، ك ، ل ، هـ .

1) بين أن طول ضلع المربع و ك ل هـ يساوي $\sqrt{8}$.

2) جزيء المربع و ك ل هـ إلى أربع مربعات متقايسة . ثم عين طول ضلع كل من هذه المربعات

3) استنتج من هذا الإنشاء أن $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. أكمل كلاً مما يلي :



$|-1,7| = \ldots\ldots$ ، $|+7| = \ldots$ ، $|5| = \ldots$ ، $|-5| = \ldots\ldots$ ؛

$\left|-\frac{3}{7}\right| = \ldots$ ، $\left|\frac{3}{7}\right| = \ldots$

3. عين العدد الحقيقي س في كل من الحالات الآتية :

1) $|س| = 3.5$ ، $|س| = -7$ ، $|س| = \frac{3}{2}$ ، $|س| = 0$

2) $|س - 3| = 2$ ، $|س - 2| = 2$ ، $|5 - س| = 3$.

4. أحسب ما يلي :

1) $م = 9 - \frac{3}{5} + \frac{7}{4}$ ؛ $م' = \frac{5}{12} + 3 - \frac{14}{8}$.

2) احسب : $م + م'$ ؛ $م - م'$ ؛ $م \times م'$ ؛ $\frac{م}{م'}$.

5. 1) احسب كلاً من العددين الحقيقين :

$$س = \frac{\left(1 - \frac{3}{2}\right)\left(-4 + \frac{1}{6}\right)}{2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6}} \quad ؛ \quad ع = \frac{1 - \frac{1}{\frac{3}{7} - 2}}{2 + \frac{1}{5} - \frac{7}{2}}$$

2) احسب كلاً من : $س + ع$ ؛ $س - ع$ ؛ $س ع$ ؛ $\frac{س}{ع}$.

6. إليك المساواة :

$$\frac{1}{ن(ن+1)} = \frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1} \quad (ن \in ط^*)$$

1) تحقق من صحة هذه المساواة من أجل $ن \in \{1 ، 2 ، 3 ، 4\}$

2) استنتج طريقة بسيطة لحساب المجموع :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5}$$

7. احسب النسب الآتية :

$$\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{2}{3}} ؛ \frac{\frac{4}{6} + \frac{5}{3}}{\frac{7}{12}} ؛ \frac{8 - \frac{2}{5}}{0,7} ؛ \frac{0,3}{5 + \frac{1}{7}}$$

8. أوجد القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^2}$ لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} ؛ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ؛ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} ؛ \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} .$$

2) احسب القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^2}$ لكل من الأعداد الحقيقية الآتية

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} ؛ \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} ؛ \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

9. اكتب العدد الحقيقي $\frac{7}{22}$ على شكل نشر عشري غير محدود دوري . ما هو دوره ؟

10. احسب الأعداد الحقيقية الآتية :

$\text{س} = \text{ا}^2 + \text{ا}^3$ ؛ $\text{ع} = \text{ا}^2 - \text{ا}^3$ ؛ $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{ع}}$ ، حيث :

1) $\text{ا} = -\dfrac{1}{3}$ ؛ 2) $\text{ا} = \dfrac{5}{2}$.

11. احسب الأعداد الحقيقية الآتية :

$\text{س} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$ ؛

$\text{ع} = \left(-\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{7}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{3}{7}\right)^{-2}$

$\text{ص} = \left(2 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6}\right)^{-1} \times \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}\right)$.

12. ا ، ب عددان حقيقيان غير معدومين ؛ احسب كلا مما يلي :

$(\text{ا}\text{ب})^{-3}$ ؛ $(\text{ا}^2\text{ب})^{-1}$ ؛ $(2\text{ا}\text{ب})^{-2}$ ؛ $(\text{ا}^3 \times \text{ا}^{-5})^{-2}$

$(\text{ا}^2\text{ب}^{-3})^{-1} \times (\text{ا}^{-3}\text{ب}^2)^2$ ؛ $[(\text{ا}^{-1}\text{ب}^2)^{-2}]^3$.

$(-\text{ا}^2\text{ب}^{-1})^{-2} \times (\text{ا}^{-3}\text{ب})^2$ ؛ $(3\text{ا}^{-3}\text{ب}^2)^2 \times (-2\text{ا}^2\text{ب}^{-4})^{-1}$

$\left(\dfrac{\text{ا}^2}{\text{ب}}\right)^{-1}$ ؛ $\left(\dfrac{\text{ا}}{\text{ب}^2}\right)^{-2}$ ؛ $3\text{ا}^2 \times \left(\dfrac{\text{ب}^{-1}}{\text{ا}^2}\right)^{-2}$

13. اكتب كلاً من المجاميع الجبرية الآتية بشكل أبسط . حيث ا ، ب عددان حقيقيان .

1) $(\text{ا} + \text{ب} - 12{,}4) + (\text{ا} - \text{ب} + 10{,}6) - (\text{ا} + \text{ب} + 7)$.

2) $(5\text{ا} - 3\text{ب} - 5{,}09) - (-\text{ا} + \text{ب} - 8{,}21) + (-\text{ا} - \text{ب} + 5{,}1)$.

3) $(1{,}7 - 2\text{ا}) + (3{,}8 - \text{ب} + \text{ا}) - (\text{ا} + 5)(3\text{ب} - 1{,}2)$.

14. أكمل ما يلي :

1) $\text{ا} + \text{ب} - 4 + \text{ح} - \text{د} = \text{ا} + \text{ب} - (\ldots\ldots) = \text{ا} + \text{ب} + \text{ح} - (\ldots\ldots)$

2) $\text{ا} - \text{ب} - \text{ح} + \text{د} - 3{,}5 = \text{ا} - \text{ح} - (\ldots\ldots) = \text{ا} + \text{د} - (\ldots\ldots)$

3) ا - ب + حـ + 3.8 = ا - ب + (......) = ا - حـ - (.......)

15. ا . ب . حـ . ء أعداد حقيقية حيث :
ا = 103.52 . ب = 4.39 . حـ = - 31.27 . ء = 89.48 .
احسب 1) (ا - حـ) . (ب - ء) ثم (ا - حـ) + (ب - ء) .
2) (ا - ء) . (ب - حـ) ثم (ا - ء) + (ب - حـ) .

16. اكتب كلا مما يلي بشكل أبسط :
1) (ا + ب - 3) - [(ا - ب + 1) - (ا + 3)]
2) 5 - [(5ا - ب + 3) - 2(ا - ب + 2)] + 2[(ا + ب) - 3(ا + ب)]
+ [4 + 2(ا - 2)] - 7[(ا - ب - 9) - (5 - 8ا)]

17. ا . ب . حـ أعداد حقيقية حيث :
ا = 254.37 . ب = - 175.373 . حـ = - 52,4 .
احسب كلاً من : س = ا + ب + حـ ؛ ع = ا + ب - حـ ؛ ص = ا - ب + حـ
ك = ا - ب - حـ ؛ ل = 2 س + 3 ع - 4 (ص - ك) .

18. س عدد حقيقي حيث س > 5
أوجد : | س - 2 | ؛ | س - 5 | ؛ | 5 - س |
ثم أوجد : | س + 2 | ؛ | 3 - س | ؛ | 0,5 - س | إذا كان س < - 2

19. بسط كلاً مما يلي ، حيث ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية :
1) 2 (ا - ب) - 5 (ا + ب - 2)
2) ا (ب + حـ) - ب (حـ + ا) - حـ (ا + ب)
3) 4 (ا - ب + حـ) - 5 (ا - ب + حـ) - (ا + ب - حـ)

20. حلل كلاً مما يلي إلى جداء . حيث س . ع عددان حقيقيان :
1) 15 س + 25 ع - 5 .
2) 21 س + 28 ع - 35 .
3) 24 س ع - 18 س - 12
4) 9 $س^2$ - 4 ؛
5) 25 $س^2$ - 49 ؛
6) 81 $س^2$ - 64 ؛

21. انشر كلاً مما يلي : حيث س ، ع عددان حقيقيان :

$(3\text{س}+5)^2$ ، $(\text{س}-3)^2$ ، $(1-2\text{س})^2$ ، $(3\text{س}-7)(3\text{س}+7)$ ؛

$(4+5\text{س})(4-5\text{س})$ ؛ $(0{,}5+2\text{س})^2$ ؛ $\left(\frac{2}{3}\text{س}+\frac{1}{4}\right)^2$ ؛

$\left(\frac{3}{5}\text{س}-\frac{5}{3}\right)^2$ ؛ $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\text{س}\right)\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{7}\text{س}\right)$

22. حلل كلا مما يلي إلى جداء حيث س ، ع عددان حقيقيان :

1) $64\text{س}^2-48\text{س}+9$ ؛
2) $9\text{س}^2-12\text{س}\text{ع}+4\text{ع}^2$.
3) $9\text{س}^2+48\text{س}+64$.
4) $36\text{س}^2+60\text{س}+25$.

23. حلل كلا مما يلي إلى جداء عاملين حيث س ، ع عددان حقيقيان :

1) $(7+2\text{س})(4-\text{س})-(5+\text{س})(4-\text{س})$.
2) $(\text{س}-3)(7-2\text{س})-(4\text{س}^2+36-24\text{س})$.
3) $(\text{س}+3)(2\text{س}-1)+(4\text{س}+5)(\text{س}+3)$.
4) $\text{س}^3+3\text{س}^2-4\text{س}-12$.

24. برهن أن :

1) $(\text{س}+\text{ع})^3=\text{س}^3+3\text{س}^2\text{ع}+3\text{س}\text{ع}^2+\text{ع}^3$.
2) $(\text{س}-\text{ع})^3=\text{س}^3-3\text{س}^2\text{ع}+3\text{س}\text{ع}^2-\text{ع}^3$
3) $\text{س}^3-\text{ع}^3=(\text{س}-\text{ع})(\text{س}^2+\text{س}\text{ع}+\text{ع}^2)$.
4) $\text{س}^3+\text{ع}^3=(\text{س}+\text{ع})(\text{س}^2-\text{س}\text{ع}+\text{ع}^2)$

25. بين أنه :

1) إذا كان $\frac{1}{2}\text{س}+3\leqslant\text{ع}-5$ فإن : $\frac{1}{2}\text{س}\leqslant\text{ع}-8$.
2) إذا كان $2\text{س}-6\geqslant4\text{ع}+8$ فإن : $\text{س}-3\geqslant2\text{ع}+4$.
3) إذا كان $7-\text{س}\leqslant3\text{ع}-1$ فإن : $\text{س}-7\geqslant1-3\text{ع}$

26. استعمل الرياضي الشهير محمد بن موسي الخوارزمي في القرن الثالث هجري الحصر الآتي :

$$3,1428 > \pi > 3,1416 \quad \text{أي} \quad 3 + \frac{1}{7} > \pi > \frac{62832}{2 \times 10^{4}}$$

1) عين من بين الأعداد الحقيقية الآتية الموجب منها والسالب :

$$(3,14 - \pi) \text{ ؛ } (3,15 - \pi) \text{ ؛ } (3 - \pi) \text{ ؛ } (5 - \pi) \text{ ؛ } \pi - \frac{22}{7}$$

2) أكمل ما يلي بتقريب 0,0001 كلاً مما يلي :

$$\left|3,14 - \pi\right| = \ldots\ldots \text{ ؛ } \left|3,15 - \pi\right| = \ldots\ldots$$

$$\left|2 - \pi\right| = \ldots\ldots \text{ ؛ } \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = \ldots\ldots$$

27. إليك الحصرين :

$3,14159 < \pi < 3,14160$.

$2,751 <$ نق $< 2,752$.

حيث نق نصف قطر قرص مساحته م .

أوجد حصرًا للعدد م من الشكل :

أ < م < ب حيث ب − أ = ك × 10^{-4} .

رياضيون من المغرب الكبير

• ابن الياسمين :

عاش في المغرب وتوفي عام 1201 م .

يعتبر من بين مؤسسي المدرسة العربية المغربية في الحساب والجبر. له كتاب « تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار » . واستعمل في هذا الكتاب الرموز مثل رموز الكسور باستعمال الخط الفاصل بين البسط والمقام.

وتحدث عن الرمز ﺣ للدلالة على الجذر التربيعي .

وضع ابن الياسمين « أرجوزة » صاغ فيها قواعد الحساب والجبر شعرًا ، وعالج فيها على الخصوص حلول المعادلات النموذجية الست للخوارزمي .

• ابن البناء :

ولد وعاش في مراكش ما بين (654 هـ / 1256 م ـ 721 هـ / 1321 م) كان أبوه بناء فتولع بالهندسة وتعلمها من أستاذه القاضي الشريف ، ونبغ في الرياضيات والفلك وألف فيهما كما ألف في فنون أخرى كالمنطق والأصول والفرائض .

ومن أبرز كتبه الرياضية «كتاب تلخيص أعمال الحساب » الذي لخص فيه التقليد الرياضي الجبري في المغرب والأندلس . وحسب بعض المؤرخين فإنه لخصه من كتاب الجبر لعبد الرحمن القرش نزيل بجاية توفي بها (سنة 580 هـ / 1184) الذي هو فضل شارح الجبر أبي كامل ، وأظهر فيه استقلال الحساب والجبر عن الهندسة . لقد اشتهر هذا الكتاب شرقا وغربا وبقي مرجعا لعدة قرون .

• ابن قنفذ القسنطيني :

ولد سنة 720 هـ وتوفي عام 810 هـ / 1406 م
ألف كثيرًا في الرياضيات والفلك والفرائض والدين .

من كتبه الرياضية «كتاب حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب» وهو شرح لتلخيص ابن البناء .

وحسب نتائج البحث في تاريخ الرياضيات ، فإن ابن قنفذ هو من بين الرياضيين الذين استعملوا الرموز في المعادلات وفي كثيرات الحدود . وهو أول من استعمل الصفر كطرف ثان لمعادلة مثلاً 30 شَـ إلا 50 ل 0.
وتقرأ : 30 شيئا إلا 50 يعدل صفرًا .

ونعبر الآن عن هذه المعادلة كما يلي :
30 س − 50 = 0 .

• القلصادي :

رياضي أصله من بسطة بالأندلس ، رحل إلى تلمسان وسمع من علمائها وسافر إلى القاهرة وعاد إلى باجة بتونس حيث توفي عام 891 هـ / 1486 م .

وحسب المؤرخين ، فإن أكثر مؤلفاته في الفرائض والحساب .
ومن بين مؤلفاته الرياضية «كتاب كشف الأسرار عن علم حروف الغبار» الذي لخصه عام 852 هـ من كتابه «كشف الجلباب عن علم الحساب» .
وقد استعمل في هذا الكتاب الرموز الرياضية ومن بينها الرمز جـ للدلالة على الجذر التربيعي مثلاً 25 هو 5 أي $\sqrt{25} = 5$.
وساهم في تحسين طريقة حل المعادلات من الدرجة الأولى .

4 الأشعة في المستوي

مجموعة أشعة المستوي

1. مفهوم الشعاع :

(س س′) مستقيم ا ، ب نقطتان منه (الشكل 1)

الشكل 1

• الثنائية المرتبة (ا ، ب) التي نسميها ثنائية نقطية ، تعيّن **شعاعًا** ، نرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{اب}}$ أو برمز آخر مثل $\overleftarrow{\text{ش}}$.

الشكل 2

نقول إن (ا ، ب) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$

ونكتب : $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{اب}}$ (الشكل 2)

• منحى المستقيم (س س′) يسمى **منحى** الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$

• الاتجاه من ا إلى ب يسمى **اتجاه** الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$.

• طول القطعة [اب] يسمى **طويلة** أو **معيار** الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$.

نكتب : $\| \overleftarrow{\text{ش}} \| = \| \overleftarrow{\text{اب}} \| = \text{اب}$

ملاحظات :

1) الثنائية النقطية (ا ، ا) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{اا}}$ الذي نسميه **الشعاع المعدوم** . ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{0}$ أي :

$\overleftarrow{\text{اا}} = \overleftarrow{0}$ و $\| \overleftarrow{0} \| = 0$

$\overleftarrow{اب} = \vec{0}$ يعني أن النقطتين ا ، ب متطابقتان. أي: (ا ، ب) = (ب ، ا)

2) إذا كان $\overleftarrow{اب} \neq \vec{0}$ فإن (ا ، ب) ≠ (ب ، ا)

الثنائية النقطية (ب ، ا) تعيّن الشعاع $\overleftarrow{با}$ الذي :

- **منحاه** هو منحى الشعاع $\overleftarrow{اب}$
- **اتجاهه** هو عكس اتجاه $\overleftarrow{اب}$
- **ومعياره** هو معيار $\overleftarrow{اب}$ أي $\|\overleftarrow{اب}\| = \|\overleftarrow{با}\|$.

الشعاع $\overleftarrow{با}$ يسمى **الشعاع المعاكس** للشعاع $\overleftarrow{اب}$.

3) يوجد في المستوي عدد غير منته من الثنائيات النقطية التي تمثل نفس الشعاع.

> مجموعة أشعة المستوي هي مجموعة غير منتهية
> نرمز لهذه المجموعة برمز مثل ش

2. تساوي شعاعين :

تعريف :

> الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما
> نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطويلة.

– في الشكل 3 الشعاعان $\overleftarrow{ش_1}$ و $\overleftarrow{ش_2}$ متساويان

ونكتب $\overleftarrow{ش_1} = \overleftarrow{ش_1}$

$\overleftarrow{ش_1}$ $\overleftarrow{ش_2}$

الشكل 3

وأيضا في الشكل 4 : $\overleftarrow{و_1} = \overleftarrow{و_2}$.

$\overleftarrow{و_1}$ $\overleftarrow{و_2}$

الشكل 4

ملاحظة 1 : أ ، ب نقطتان من (س س') (الشكل 5)
الشعاعان $\overrightarrow{\text{أب}}$ و $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ متعاكسان

نكتب : $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{ب أ}}$

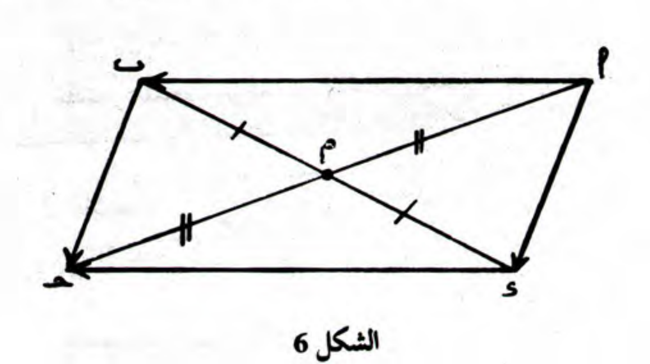
الشكل 5

ملاحظة 2 :

• أ ، ب ، ح ، د أربع نقط من المستوي كل ثلاث منها ليست على استقامة واحدة :

إذا كان ($\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{دح}}$) فإن ((أب) // (حد) و أب = حد)

نستنتج أن الرباعي أبحد متوازي أضلاع .
نستنتج أيضًا أن للقطعتين [أح] و [ب د] نفس المنتصف .



الشكل 6

• يمكن أن نبرهن أنه إذا كان الرباعي أبحد متوازي أضلاع ، فإن :
$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{دح}}$ و $\overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{بح}}$

1) م منتصف القطعة [$\overline{اب}$] .

ـ هل $\overleftarrow{م ا} = \overleftarrow{م ب}$ ؟ وهل $\overleftarrow{ا ب} = \overleftarrow{ا م}$ ؟

2) ا نقطة من نصف المستقيم [م س ، ب نقطة من نصف المستقيم [م ع

بحيث م ا = م ب .

ـ هل $\overleftarrow{م ا} = \overleftarrow{م ب}$ ؟

3) (س ع) ، (س′ ع′) مستقيمان متوازيان ، ا و ب نقطتان من (س ع)، حـ نقطة نقطة من (س′ ع′) .

• عيّن نقطة ء من (س′ ع′) بحيث $\overleftarrow{ا ب} = \overleftarrow{حـ ء}$.

• عيّن نقطة هـ من (س′ ع′) بحيث $\overleftarrow{ا ب} = - \overleftarrow{حـ هـ}$.

4) ء (م ، م ا) دائرة . ن$_1$ ، ن$_2$ ، ن$_3$ نقط من (ء) .

هل $\overleftarrow{م ن_1}$ ، $\overleftarrow{م ن_2}$ ، $\overleftarrow{م ن_3}$ أشعة متساوية ؟

1) مجموع شعاعين :

تعريف :

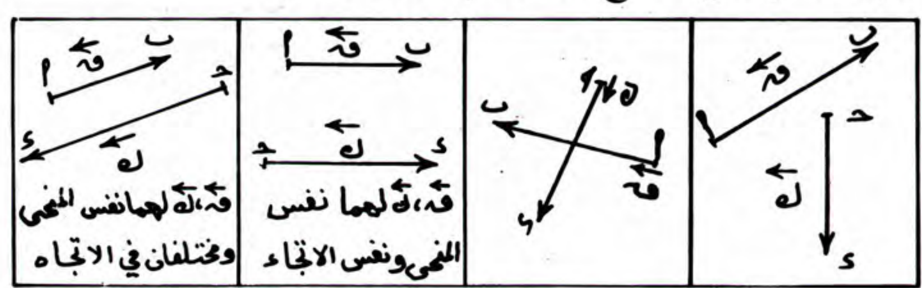
مجموع شعاعين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ هو الشعاع $\overleftarrow{ل}$ بحيث :
إذا كان (ا ، ب) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{ق}$ و (ب ، حـ) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{ك}$
فإن (ا ، حـ) ممثل للشعاع $\overleftarrow{ل}$

نكتب : $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ب حـ} = \overleftarrow{ا حـ}$ أي $\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ك} = \overleftarrow{ل}$.

2) تمثيل مجموع شعاعين :

$\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ شعاعان بحيث : $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ا ب}$ و $\overleftarrow{ك} = \overleftarrow{حـ ء}$.

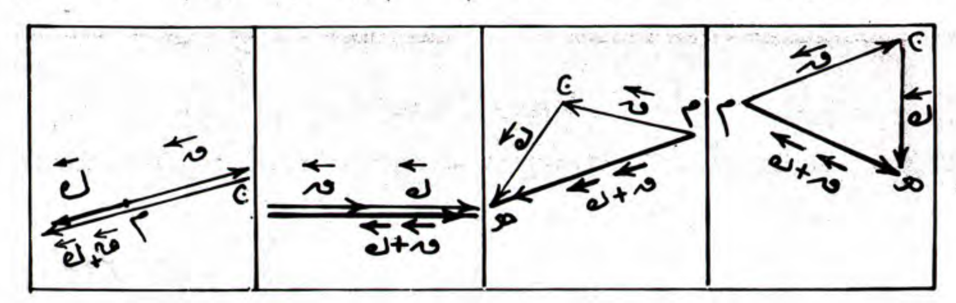
لنبحث عن ممثل للشعاع $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$ في الحالات الآتية :



لكي نمثل المجموع $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$:

• نختار ثلاث نقط م ، ن ، هـ بحيث : $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن هـ}} = \overleftarrow{\text{حـ د}}$.

فنحصل على الأشكال الآتية ، حيث $\overleftarrow{\text{م هـ}} = \overleftarrow{\text{م ن}} + \overleftarrow{\text{ن هـ}}$ أي $\overleftarrow{\text{م هـ}} = \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$.



ملاحظات :

• مهما كانت النقط أ ، ب ، حـ من المستوي فلدينا :

$\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب حـ}} = \overleftarrow{\text{أ حـ}}$ (هذه المساواة تسمى علاقة شال)

• إذا كانت ب منتصف [أ حـ] فإن $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب حـ}} = \vec{0}$ ..

• أ ب حـ د متوازي أضلاع ، لدينا حسب علاقة شال .

$\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب حـ}} = \overleftarrow{\text{أ حـ}}$ و $\overleftarrow{\text{أ د}} + \overleftarrow{\text{د حـ}} = \overleftarrow{\text{أ حـ}}$

لكن $\overleftarrow{\text{ب حـ}} = \overleftarrow{\text{أ د}}$

إذن $\boxed{\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ د}} = \overleftarrow{\text{أ حـ}}}$

الشكل 7

• في الفيزياء ، الشعاع $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ يسمى محصلة الشعاعين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ و $\overleftarrow{\text{أ د}}$.

3) الجمع في المجموعة ش :

إذا أرفقنا كل ثنائية ($\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) من ش × ش بالشعاع الوحيد $\overleftarrow{\text{ل}}$ الذي هو مجموع $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، فنعرّف بذلك تطبيقًا من ش × ش إلى ش نسميه الجمع الشعاعي أو الجمع في ش .

4) خواص الجمع الشعاعي :

نقبل أن لعملية الجمع في ش الخواص الآتية :

- **التبديل** : مهما يكن الشعاعان $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}}=\overleftarrow{\text{ك}}+\overleftarrow{\text{ق}}$.
- **التجميع** : مهما تكن الأشعة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ فإن :

$(\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}})+\overleftarrow{\text{ل}}=\overleftarrow{\text{ق}}+(\overleftarrow{\text{ك}}+\overleftarrow{\text{ل}})$.

نكتب أيضا $\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}}+\overleftarrow{\text{ل}}=(\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}})+\overleftarrow{\text{ل}}=\overleftarrow{\text{ق}}+(\overleftarrow{\text{ك}}+\overleftarrow{\text{ل}})$.

- **العنصر الحيادي** : مهما يكن الشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{0}=\overleftarrow{0}+\overleftarrow{\text{ق}}=\overleftarrow{\text{ق}}$.

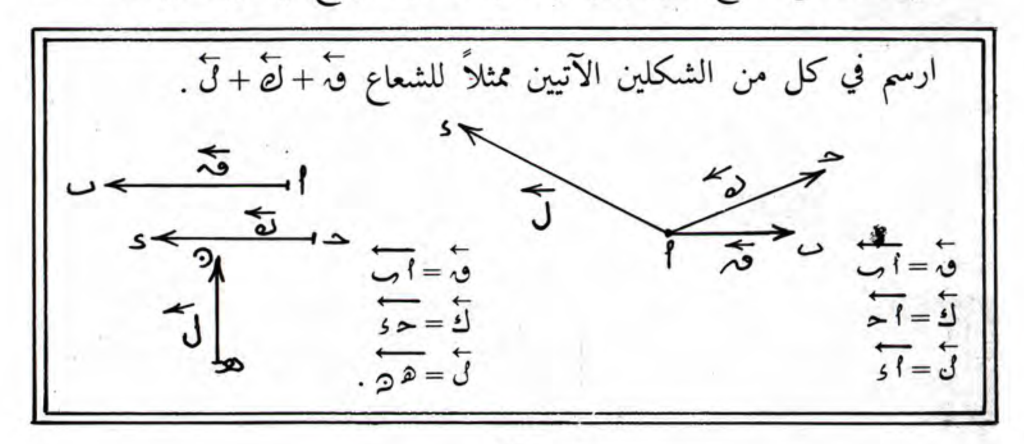
نقول إن الشعاع المعدوم $\overleftarrow{0}$ **هو العنصر الحيادي** بالنسبة لعملية الجمع في مجموعة أشعة المستوي .

- **العنصر النظير** : مهما يكن الشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ق}}+(-\overleftarrow{\text{ق}})=(-\overleftarrow{\text{ق}})+\overleftarrow{\text{ق}}=\overleftarrow{0}$

نقول إن الشعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ و $-\overleftarrow{\text{ق}}$ متناظران بالنسبة لعملية الجمع في ش .

أي أن لكل شعاع نظير وحيد بالنسبة لعملية الجمع في ش هو معاكسه .

ارسم في كل من الشكلين الآتيين ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}}+\overleftarrow{\text{ل}}$.



تمرين محلول

ا ، ب ، م ، ح ، د خمس نقط من المستقيم (س س′) ، حيث م هي منتصف كل من القطعتين [ب ح] ، [ا د] . (الشكل)

– بيّن أن $\overrightarrow{\text{اب}}$ = $\overrightarrow{\text{حد}}$.

البرهان :

م منتصف [ا د] معناه م ا = م د .

و م منتصف [ب ح] معناه م ب = م ح .

إذن م ا – م ب = م د – م ح أي ا ب = ح د

لكن الثنائية النقطية (ا ، ب) تعيّن الشعاع $\overrightarrow{\text{اب}}$.

والثنائية النقطية (ح ، د) تعيّن الشعاع $\overrightarrow{\text{حد}}$.

الشعاعان $\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حد}}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس المعيار نستنتج أنهما متساويان أي :

$\overrightarrow{\text{اب}}$ = $\overrightarrow{\text{حد}}$.

ضرب شعاع بعدد حقيقي

1. جداء شعاع بعدد حقيقي :

1) تعريف :

• جداء شعاع غير معدوم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بعدد حقيقي غير معدوم ك هو الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ الذي يكتب $\overrightarrow{\text{ش}} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{ق}}$ بحيث يكون للشعاعين $\overrightarrow{\text{ق}}$ و $\overrightarrow{\text{ش}}$:

ـ نفس المنحى .

ـ نفس الاتجاه إذا كان ك موجباً ، واتجاهان مختلفان إذا كان ك سالباً .

ـ $\|\overrightarrow{\text{ش}}\| = \|\text{ك} . \overrightarrow{\text{ق}}\| = |\text{ك}| . \|\overrightarrow{\text{ق}}\|$.

• إذا كان $\text{ك} \neq 0$ فإن $\text{ك} . \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

• إذا كان $\overrightarrow{\text{ق}} \neq \overrightarrow{0}$ فإن $0 . \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{0}$.

2) أمثلة :

مثال 1 : $\overrightarrow{\text{ق}}$ شعاع ، لنعين الشعاع $3\overrightarrow{\text{ق}}$.

ـ نختار ثنائية نقطية (ا ، ب) بحيث $\overrightarrow{\text{اب}} = \overrightarrow{\text{ق}}$

ونعين على (اب) نقطتين حـ ، د بحيث يكون اب = ب حـ = حـ د (الشكل 8)



الشكل 8

نستنتج أن $\overrightarrow{\text{اب}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ د}} = \overrightarrow{\text{ق}}$

وأن : $\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ د}} = \overrightarrow{\text{اد}}$

أي $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ا ء}}$

نكتب $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ق}} = 3\,\overleftarrow{\text{ق}}$

إذن $3\,\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ا ء}}$

الشعاع $3\,\overleftarrow{\text{ق}}$ هو جُداء العدد الحقيقي 3 والشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}$.

هذا يعني أن الثنائية النقطية (ا ، ء) تمثل الشعاع $3\,\overleftarrow{\text{ق}}$.

لاحظ أن :

- للشعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $3\,\overleftarrow{\text{ق}}$ نفس المنحى ونفس الاتجاه
- $\|3\,\overleftarrow{\text{ق}}\| = \text{ا ء} = \text{ا ب} + \text{ب ح} + \text{ح ء} = 3\,\text{ا ب} = 3\,\|\overleftarrow{\text{ق}}\|$.

مثال 2 :

$\overleftarrow{\text{ش}}$ شعاع بحيث $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، لنعين الشعاع $-5\,\overleftarrow{\text{ش}}$.

ـ نختار على (ا ب) النقط ح ، ء ، ه ، و، بحيث يكون :

$\overleftarrow{\text{ا ب}} = \overleftarrow{\text{ب ح}} = \overleftarrow{\text{ح ء}} = \overleftarrow{\text{ء ه}} = \overleftarrow{\text{ه و}}$.

لدينا $\overleftarrow{\text{ا و}} = 5\,\overleftarrow{\text{ا ب}}$ أي $\overleftarrow{\text{ا و}} = 5\,\overleftarrow{\text{ش}}$

لكن $\overleftarrow{\text{و ا}} = -\overleftarrow{\text{ا و}} = -5\,\overleftarrow{\text{ش}}$

ش
ا ب ح ء ه و

الشكل 9

فالثنائية النقطية (و ، ا) تمثل الشعاع $-5\,\overleftarrow{\text{ش}}$ الذي هو جداء العدد الحقيقي -5 والشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$.

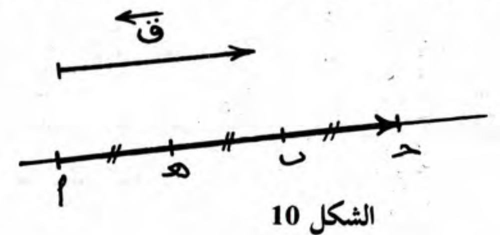
لاحظ أن :

- للشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $-5\,\overleftarrow{\text{ش}}$ نفس المنحى واتجاهان متعاكسان .
- وأن : $\|-5\,\overleftarrow{\text{ش}}\| = |-5| \,.\, \|\overleftarrow{\text{ش}}\| = 5\,\|\overleftarrow{\text{ش}}\|$.

مثال 3 : $\overleftarrow{\text{ق}}$ شعاع ، لنعيّن الشعاع $\frac{3}{2}\overleftarrow{\text{ق}}$.

ـ نختار ممثلا (ا ، ب) للشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}$ فيكون $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ا ب}}$

ونعيّن على المستقيم (أب) نقطتين هـ ، حـ بحيث أهـ = هـب = ب حـ



الشكل 10

نستنتج أن :

$$\text{أحـ} = \frac{3}{2}\,\text{أب}$$

لاحظ أن :

• للشعاعين $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$ نفس المنحى ونفس الاتجاه .

• ولدينا $\|\overleftarrow{\text{أحـ}}\| = \frac{3}{2}\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$.

فالشعاع $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ هو جداء العدد الحقيقي $\frac{3}{2}$ والشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$.

أي $\overleftarrow{\text{أحـ}} = \frac{3}{2} . \overleftarrow{\text{أب}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{ق}}$.

إن الثنائية (أ ، حـ) تمثل الشعاع $\frac{3}{2}\overleftarrow{\text{ق}}$:

ملاحظة : الثنائية النقطية (حـ ، أ) تمثل الشعاع $-\frac{3}{2}\overleftarrow{\text{ق}}$

أي $\overleftarrow{\text{حـأ}} = -\frac{3}{2}\overleftarrow{\text{ق}}$.

1) عيّن في المثال 1 ممثلا للشعاع $-3\overleftarrow{\text{ق}}$.

2) $\overleftarrow{\text{ق}}$ شعاع ، عيّن كلا من $4\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\frac{3}{5}\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $-\frac{2}{5}\overleftarrow{\text{ق}}$.

3) ضرب شعاع بعدد حقيقي وخواصه :

• رأيت أن جداء شعاع بعدد حقيقي هو شعاع .

التطبيق الذي يرفق كل ثنائية مرتبة (ك ، $\overrightarrow{ش}$) من ح × شـ بالجداء ك $\overrightarrow{ش}$.

يسمى **ضرب شعاع بعدد حقيقي** .

• نقبل أن ضرب شعاع بعدد حقيقي له الخواص الآتية :

> مهما يكن العددان الحقيقيان س ، ع ومهما يكن الشعاعان $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ش}$ فإن :
>
> ★ (س + ع) $\overrightarrow{ش}$ = س $\overrightarrow{ش}$ + ع $\overrightarrow{ش}$
>
> ★ س (ع $\overrightarrow{ش}$) = (س ع) $\overrightarrow{ش}$
>
> ★ س ($\overrightarrow{ش}$ + $\overrightarrow{ق}$) = س $\overrightarrow{ش}$ + س $\overrightarrow{ق}$.

لدينا $-$ $\overrightarrow{ش}$ = ($-$ 1) $\overrightarrow{ش}$

ملاحظة :

> ك عدد حقيقي و $\overrightarrow{ش}$ شعاع .
>
> ك . $\overrightarrow{ش}$ = $\overrightarrow{0}$ يعني أن ك = 0 أو $\overrightarrow{ش}$ = $\overrightarrow{0}$.

2. توازي شعاعين :

$\overrightarrow{ق}$ شعاع غير معدوم ، ك عدد حقيقي غير معدوم .

تعلم من تعريف جداء شعاع بعدد حقيقي أن للشعاعين $\overrightarrow{ق}$ ، ك $\overrightarrow{ق}$ نفس المنحى ، نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{ق}$ و ك $\overrightarrow{ق}$ متوازيان ونكتب $\overrightarrow{ق}$ // ك $\overrightarrow{ق}$

$\overrightarrow{ق}$

ك $\overrightarrow{ق}$

ك > 0

$\overrightarrow{ق}$

ك $\overrightarrow{ق}$

ك < 0

تعريف :

الشعاعان المتوازيان هما شعاعان لهما نفس المنحى

نقبل أن الشعاع المعدوم $\vec{0}$ يوازي كل شعاع $\vec{ش}$.

نتيجة 1 :

$\vec{و}$ ، $\vec{ش}$ شعاعان متوازيان يعني أنه يوجد عدد حقيقي وحيد غير معدوم ك بحيث $\vec{و} = ك\,\vec{ش}$

نكتب $\vec{و} // \vec{ش}$.

ملاحظات :

1) الشعاعان المتساويان هما شعاعان متوازيان .

2) الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان متوازيان .

3) إذا كانت ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على استقامة واحدة .

فتكون ـ مثلا ـ الأشعة $\overrightarrow{اب}$ ، $\overrightarrow{احـ}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ متوازية

أي $\overrightarrow{اب} // \overrightarrow{احـ}$ ، $\overrightarrow{احـ} // \overrightarrow{بحـ}$

ـ اذكر أشعة أخرى متوازية .

لنبرهن على النظرية الآتية:

ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على استقامة واحدة يعني أنه يوجد عددان حقيقيان غير معدومين معًا س ، ع بحيث :

$س\,\overrightarrow{اب} + ع\,\overrightarrow{احـ} = \vec{0}$

البرهان :

1) نفرض أن النقط ا ، ب ، ح على استقامة واحدة

ـ ولنبرهن على وجود عددين حقيقيين غير معدومين معًا بحيث :

$$س \overleftarrow{اب} + ع \overleftarrow{اح} = \overleftarrow{0} .$$

ـ بما أن النقط ا ، ب ، ح على استقامة واحدة فإن :

الشعاعين $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اح}$ متوازيان وهذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي وحيد غير معدوم ك بحيث :

$$\overleftarrow{اب} = ك . \overleftarrow{اح}$$

ومنه $\overleftarrow{اب} - ك . \overleftarrow{اح} = \overleftarrow{0}$ أي $1 . \overleftarrow{اب} + (-ك) . \overleftarrow{اح} = \overleftarrow{0}$.

نضع $س = 1$ ، $ع = -ك$ فيكون :

$$س . \overleftarrow{اب} + ع . \overleftarrow{اح} = \overleftarrow{0} .$$

2) نفرض أنه يوجد عددان حقيقيان س ، ع غير معدومين معًا بحيث :

$$س . \overleftarrow{اب} + ع . \overleftarrow{اح} = \overleftarrow{0}$$

ولنبرهن أن النقط ا ، ب ، ح على استقامة واحدة .

ـ بما أن $س . \overleftarrow{اب} + ع . \overleftarrow{اح} = \overleftarrow{0}$

فإن $س . \overleftarrow{اب} = -ع . \overleftarrow{اح}$

نفرض أن أحد العددين مثلا س غير معدوم ، فنجد :

$$\overleftarrow{اب} = -\frac{ع}{س} . \overleftarrow{اح}$$

نضع $ك = -\frac{ع}{س}$ فيكون $\overleftarrow{اب} = ك . \overleftarrow{اح}$ ،

وهذا يعني أن الشعاعين $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اح}$ متوازيان

فالنقط ا ، ب ، ح على استقامة واحدة .

مسألة محلولة

ا ب ح مثلث ، ل ، م ، ه ثلاث نقط بحيث :

$\overrightarrow{\text{ال}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حم}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{حا}}$ ، $\overrightarrow{\text{به}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{بح}}$

1) عبّر عن كل من الأشعة $\overrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overrightarrow{\text{لم}}$ ، $\overrightarrow{\text{له}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{اح}}$

2) بيّن أن النقط ل ، م ، ه على استقامة واحدة .

البرهان :

1) $\overrightarrow{\text{بح}} = \overrightarrow{\text{با}} + \overrightarrow{\text{اح}} = -\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اح}}$

$\overrightarrow{\text{بح}} = \overrightarrow{\text{اح}} - \overrightarrow{\text{اب}}$.

$\overrightarrow{\text{لم}} = \overrightarrow{\text{لا}} + \overrightarrow{\text{ام}} = \overrightarrow{\text{ام}} - \overrightarrow{\text{ال}}$

$\overrightarrow{\text{لم}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{اح}} - \frac{3}{5}\overrightarrow{\text{اب}}$

$\overrightarrow{\text{له}} = \overrightarrow{\text{لب}} + \overrightarrow{\text{به}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{بح}}$ ..

$\overrightarrow{\text{له}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{اح}} - \overrightarrow{\text{اب}}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{اح}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{اب}}$

$\overrightarrow{\text{له}} = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{اح}} = \left(\frac{5+4}{10}\right)\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{اح}}$.

$\overrightarrow{\text{له}} = \frac{9}{10}\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{اح}}$.

2) لدينا : $\overrightarrow{\text{لم}} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{\text{اب}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{اح}}$ و $\overrightarrow{\text{له}} = \frac{9}{10}\overrightarrow{\text{اب}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{اح}}$

لكن $\frac{9}{10} = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ و $-\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

نستنتج أن $\overrightarrow{\text{له}} = \left(-\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{\text{لم}}$.

فالنقط ل ، م ، ه على استقامة واحدة .

تمارين

1. ا ، ب ، ح ثلاث نقط من مستقيم (ق) .
عيّن النقطة هـ في الحالات الآتية :
1) الثنائية النقطية (ا ، هـ) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{با}}$.
2) الثنائية النقطية (ا ، هـ) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{اب}}$.
3) الثنائية النقطية (ا ، هـ) تمثل الشعاع $-\overleftarrow{\text{اح}}$.

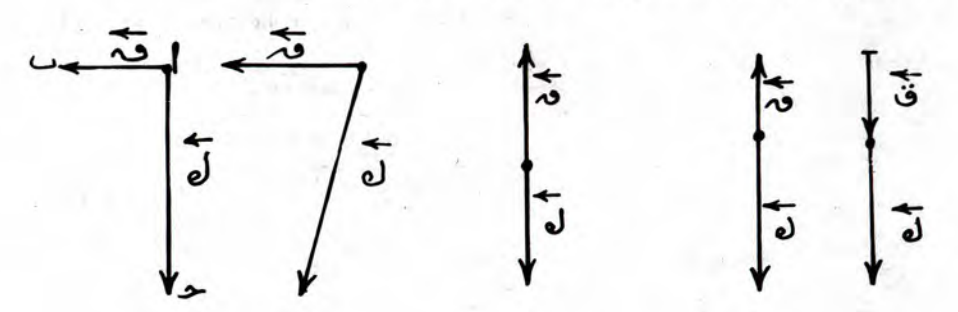
2. ا ، ب نقطتان من مستقيم ؛ م منتصف [اب] .
عيّن النقطة هـ في الحالات الآتية :
1) الثنائية النقطية (م ، هـ) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{ما}}$. عيّن في هذه الحالة الشعاع $\overleftarrow{\text{اهـ}}$.
2) الثنائية النقطية (ا ، هـ) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{ما}}$. بيّن في هذه الحالة
أن : $\overleftarrow{\text{با}} = \overleftarrow{\text{مهـ}}$ وأن $\overleftarrow{\text{اهـ}} = -\overleftarrow{\text{مب}}$.

3. اب ح مثلث .
1) عيّن النقط هـ$_1$ ، هـ$_2$ ، هـ$_3$ بحيث
الثنائية النقطية (ب ، هـ$_1$) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{اح}}$.
الثنائية النقطية (ب ، هـ$_2$) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{اب}}$.
الثنائية النقطية (ب ، هـ$_3$) تمثل الشعاع $\overleftarrow{\text{حا}}$.
2) ما نوع كل من الرباعيات اب هـ$_1$ ح ؛ ب ح هـ$_1$ هـ$_2$ ، ا ح ب هـ$_3$ ؟
3) استنتج أن الرباعي ا هـ$_1$ هـ$_2$ هـ$_3$ متوازي أضلاع

4. $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حد}}$ شعاعان متساويان .
بيّن أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{اح}}$ ، $\overleftarrow{\text{بد}}$ متساويان .

5. (ا ، ب) ثنائية نقطية غير معدومة (أي ا و ب مختلفتان)
1) علّم نقطتين ح ، د بحيث يكون الشعاع $\overleftarrow{\text{اد}}$ هو مجموع الشعاعين $\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{اح}}$.
2) علّم النقطتين ح ، د بحيث يكون : $\overleftarrow{\text{اد}} = \overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{اح}}$ و (اح) ⊥ (اب) .

6. عيّن في كل حالة الشعاع $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$ (الأشكال الآتية) :



$\|\overleftarrow{\text{ق}}\| < \|\overleftarrow{\text{ك}}\|$ $\|\overleftarrow{\text{ق}}\| = \|\overleftarrow{\text{ك}}\|$ (اب) $\perp$ (اح)

7. $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ ثلاثة أشعة بحيث $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ل}} = \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ل}}$

بيّن أن $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ك}}$.

8. $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ ثلاثة أشعة حيث : $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{اب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{اح}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ل}} = \overleftarrow{\text{اد}}$.

عيّن ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ل}}$ في كل من الحالتين :

1) $\overleftarrow{\text{ق}} = -\overleftarrow{\text{ك}}$.

2) قارن بين $\|\overleftarrow{\text{ل}} + \overleftarrow{\text{ق}}\|$ و $\|\overleftarrow{\text{ل}} + \overleftarrow{\text{ك}}\|$.

إذا كان $\overleftarrow{\text{ق}} = -\overleftarrow{\text{ك}}$ و (اد) $\perp$ (بح)

9. ابح مثلث .

1) ارسم ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{اح}} + \overleftarrow{\text{بح}}$

2) عيّن نقطة د بحيث $\overleftarrow{\text{اد}} + \overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{اح}} + \overleftarrow{\text{بح}} = \overleftarrow{0}$.

10. ابحد متوازي أضلاع .

1) برهن أن $\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{حد}} + \overleftarrow{\text{بح}} + \overleftarrow{\text{دا}} = \overleftarrow{0}$

2) استنتج أن $\overleftarrow{\text{حد}} + \overleftarrow{\text{بح}} + \overleftarrow{\text{دا}} = \overleftarrow{\text{با}}$.

11. ا ، ب ، ح ، د أربع نقط من المستوي ، برهن صحة المساويات الآتية :

1) $\overleftarrow{\text{اح}} + \overleftarrow{\text{حب}} = \overleftarrow{\text{اد}} + \overleftarrow{\text{دب}}$.

2) $\overleftarrow{\text{اح}} - \overleftarrow{\text{اد}} = \overleftarrow{\text{بح}} - \overleftarrow{\text{بد}}$.

3) $\overleftarrow{\text{اب}}+\overleftarrow{\text{بح}}+\overleftarrow{\text{حا}}=\overleftarrow{\text{حد}}+\overleftarrow{\text{دب}}+\overleftarrow{\text{بح}}$.

4) $\overleftarrow{\text{اب}}-\overleftarrow{\text{اح}}+\overleftarrow{\text{بح}}=\overleftarrow{\text{دا}}-\overleftarrow{\text{دح}}+\overleftarrow{\text{اح}}$.

12. ا ، ب ، ح ، د أربع نقط بحيث $\overleftarrow{\text{اب}}=\overleftarrow{\text{اح}}+\overleftarrow{\text{حب}}$

1) برهن أن $\overleftarrow{\text{اب}}+\overleftarrow{\text{دح}}=\overleftarrow{\text{اح}}+\overleftarrow{\text{دب}}$.

2) برهن أن $\overleftarrow{\text{اح}}+\overleftarrow{\text{بد}}=\overleftarrow{\text{اد}}+\overleftarrow{\text{بح}}$.

13. ابح مثلث . ث مركز ثقله و ا′ منتصف الضلع [بح] .

1) انشىء ممثلاً مبدأه ث للشعاع $\overleftarrow{\text{ثب}}+\overleftarrow{\text{ثح}}$.

2) برهن أن : $\overleftarrow{\text{ثا}}+\overleftarrow{\text{ثب}}+\overleftarrow{\text{ثح}}=\overleftarrow{0}$.

14. $\overleftarrow{\text{ق}}$ شعاع ، ارسم ممثلاً له (ا ، ب) .

ثم ارسم ممثلاً مبدأه ا لكل من الأشعة :

$4\overleftarrow{\text{ق}}$ ؛ $-6\overleftarrow{\text{ق}}$ ؛ $\frac{1}{2}\overleftarrow{\text{ق}}$ ؛ $\frac{3}{4}\overleftarrow{\text{ق}}$.

15. $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان بين أن الشعاعين :

$\left[(2\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}})+(3\overleftarrow{\text{ك}}-\overleftarrow{\text{ق}})\right]$ و $\left[(\overleftarrow{\text{ك}}-2\overleftarrow{\text{ق}})+(\overleftarrow{\text{ق}}-5\overleftarrow{\text{ك}})\right]$

متعاكسان .

16. ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

1) أنشىء ممثلاً لكل من الأشعة الآتية :

$\overleftarrow{\text{ق}}=3\overleftarrow{\text{اب}}+2\overleftarrow{\text{اح}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ك}}=\overleftarrow{\text{اب}}-2\overleftarrow{\text{اح}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ل}}=-\frac{3}{2}\overleftarrow{\text{اب}}+\frac{2}{3}\overleftarrow{\text{اح}}$

2) عبّر بواسطة الشعاعين $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{اح}}$ عن المجموع $\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}}+\overleftarrow{\text{ل}}$.

17. $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان بحيث :

$3(2\overleftarrow{\text{ق}}-3\overleftarrow{\text{ك}})-2(3\overleftarrow{\text{ق}}-2\overleftarrow{\text{ك}})+4(\overleftarrow{\text{ق}}+\overleftarrow{\text{ك}})+(5\overleftarrow{\text{ق}}-8\overleftarrow{\text{ك}})=\overleftarrow{0}$.

بيّن أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{ق}}$ و $\overleftarrow{\text{ك}}$ متساويان .

18. $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان غير معدومين ، س ، ع عددان حقيقيان بحيث :

$$(\text{س}\,\overleftarrow{\text{ق}} + 2\,\overleftarrow{\text{ك}}) + (\text{ع}\,\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}}) + (-\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}}) = \overleftarrow{0}$$

بيّن أن العددين س و ع يحققان العلاقة :

س = 1 − ع .

19. $\overleftarrow{\text{ق}}$ و $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان متعاكسان ؛ س ، ع عددان حقيقيان .

أوجد العلاقة بين س ، ع لكي يكون :

$$(\text{س}\,\overleftarrow{\text{ق}} + 2\,\text{ع}\,\overleftarrow{\text{ك}}) - \text{ع}\,(\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}}) + 3\,(\overleftarrow{\text{ق}} - \text{س}\,\overleftarrow{\text{ك}}) = \overleftarrow{0}$$

20. ا ، ب ، ح ، د أربع نقط ، كل ثلاث منها ليست على استقامة واحدة ، م منتصف [ا ب] ، هـ منتصف [ح د] .

بيّن أن :

1) $\overleftarrow{\text{م ح}} + \overleftarrow{\text{م د}} - \overleftarrow{\text{م ا}} - \overleftarrow{\text{م ب}} = 2\,\overleftarrow{\text{م هـ}}$.

2) $\overleftarrow{\text{ا ح}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = 2\,\overleftarrow{\text{م هـ}}$.

3) $\overleftarrow{\text{ا د}} + \overleftarrow{\text{ب ح}} = 2\,\overleftarrow{\text{م هـ}}$.

21. ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

1) عيّن النقطة م بحيث $\overleftarrow{\text{ا م}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{ا ب}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{ا ح}}$.

2) عبّر عن كل من الشعاعين $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ بواسطة الشعاعين $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا ح}}$.

3) بيّن أن م هي منتصف القطعة [ب ح] .

22. ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

$\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ ثلاثة أشعة بحيث :

$$\overleftarrow{\text{ق}} = -\overleftarrow{\text{ا ب}} + \overleftarrow{\text{ا ح}} \text{ ؛ } \overleftarrow{\text{ك}} = -\frac{1}{2}\overleftarrow{\text{ا ب}} - \frac{3}{4}\overleftarrow{\text{ا ح}} \text{ ، } \overleftarrow{\text{ل}} = \sqrt{2}\,\overleftarrow{\text{ا ب}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overleftarrow{\text{ا ح}} .$$

1) عبّر بدلالة الشعاعين $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا ح}}$ عن كل من الأشعة الآتية :

$\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ل}}$ ؛ $-2\,(\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}})$ ، $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}} + \sqrt{2}\,\overleftarrow{\text{ل}}$ ؛ $\sqrt{2}\,(\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}})$.

2) بيّن أن كلاً من الأشعة الواردة في السؤال السابق يوازي الشعاع $-2\,(\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}})$.

23. ا ، ب ، ح ثلاث نقط بحيث $2\overrightarrow{\text{اح}} + 3\overrightarrow{\text{بح}} = \vec{0}$ ؛ $\overrightarrow{\text{بح}} \neq \vec{0}$.

عين العدد الحقيقي س بحيث :

$$(1+\sqrt{2})\,\overrightarrow{\text{اح}} + (2\text{س}-1)\,\overrightarrow{\text{بح}} = \vec{0}$$

24. م ب ح مثلث ، ا نقطة بحيث $\overrightarrow{\text{اح}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{مح}}$.

د منتصف [م ب] ، ه منتصف [ا ب] .

1) عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{\text{ده}}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{\text{ام}}$.

2) بيّن أن الثنائيتين النقطيتين (ا ، ح) ، (د ، ه) تمثلان نفس الشعاع .

3) نرفق كل نقطة ن من المستوي بالشعاع $\vec{\text{ق}}$ حيث :

$\vec{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{نا}} + \overrightarrow{\text{نب}} - 2\overrightarrow{\text{نح}}$.

عبّر عن الشعاع $\vec{\text{ق}}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{\text{حه}}$.

25. اب ح مثلث . د نقطة بحيث $\overrightarrow{\text{اد}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اح}})$ ؛ ا' هي منتصف [ب ح] .

1) بيّن أن : $3\overrightarrow{\text{اد}} = 2\overrightarrow{\text{اا'}}$ ثم استنتج أن د ∈ (اا') .

2) بيّن أن : $\overrightarrow{\text{دا}} + \overrightarrow{\text{دب}} + \overrightarrow{\text{دح}} = \vec{0}$. واستنتج أن :

$$\overrightarrow{\text{بد}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{با}} + \overrightarrow{\text{بح}}) \text{ ؛ } \overrightarrow{\text{حد}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{حا}} + \overrightarrow{\text{حب}})$$

3) برهن أنه من أجل كل نقطة م من المستوي فإن :

$\overrightarrow{\text{ما}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مح}} = 3\overrightarrow{\text{مد}}$.

4) اكتب العلاقة $\overrightarrow{\text{ما}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مح}} = 3\overrightarrow{\text{مد}}$ في كلّ من الحالات الآتية :

م = ا ؛ م = ب ؛ م = ح ؛ م = د ؛ م = ا' .

5 الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي

1. الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب :

لاحظ أن : $(+3)^2 = 9$ وأن $(-3)^2 = 9$ إذن $(+3)^2 = (-3)^2$.

لاحظ أيضًا أن : $\left(+\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$ ؛ $\left(-\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$ إذن

$\left(+\frac{5}{7}\right)^2 = \left(-\frac{5}{7}\right)^2$.

و $(1,2)^2 = 1,44$ ، $(-1,2)^2 = 1,44$ إذن $(1,2)^2 = (-1,2)^2$.

$(+\sqrt{2})^2 = 2$ ، $(-\sqrt{2})^2 = 2$ إذن $(+\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2$.

بصفة عامة :

> مهما يكن العدد الحقيقي أ ، فإن $(-$ أ $)^2 = (+$ أ $)^2 =$ أ^2

• كل من $+\frac{5}{7}$ و $-\frac{5}{7}$ مربّعُه $\frac{25}{49}$.

العدد الحقيقي **الموجب** $+\frac{5}{7}$ يسمى **الجذر التربيعي التام** للعدد الحقيقي **الموجب** $\frac{25}{49}$.

نكتب : $\sqrt{\frac{25}{49}} = +\frac{5}{7}$.

• أيضا كل من $+\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ مربعه 2 .

العدد الحقيقي **الموجب** $+\sqrt{2}$ يسمى **الجذر التربيعي التام** للعدد الحقيقي **الموجب** 2 .

تعريف :

أ عدد حقيقي موجب .
الجذر التربيعي التام للعدد أ هو العدد الحقيقي الموجب ح بحيث $\text{ح}^2 = \text{أ}$

نكتب : $\text{ح} = \sqrt{\text{أ}}$.

أمثلة : $\sqrt{9} = 3$ ؛ $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$ ؛ $\sqrt{1,69} = 1,3$.

ملاحظات هامة :

1) $\sqrt{0} = 0$ ؛ $\sqrt{1} = 1$.

2) العدد الحقيقي السالب ليس له جذر تربيعي في ج .

3) كل قيمة تقريبية للعدد الأصم $\sqrt{2}$ ليست جذرا تربيعيًا **تامًا** للعدد 2 لأن مربع أي قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{2}$ لا يساوي 2 .

مثلاً :

العدد 1,41 هو القيمة المقرّبة بالنقصان إلى $\frac{1}{10^2}$ للعدد $\sqrt{2}$

لكن $(1,41)^2 \neq 2$ ، فالعدد 1,41 ليس جذرًا تربيعيًا تامًا للعدد 2 .

2. الجذر التربيعي والقيمة المطلقة :

مثال : تعلم أن $(+5)^2 = 25$

إذن $\sqrt{(+5)^2} = \sqrt{25} = +5$

وأيضا $(-5)^2 = 25$

إذن $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = +5$

لكن $+5 = |-5|$

إذن $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

وبصفة عامة :

مهما يكن العدد الحقيقي أ فإن :
$$\sqrt{\text{أ}^2} = |\text{أ}|$$

هذا يعني أن : $\sqrt{\text{أ}^2} = \text{أ}$ إذا كان $\text{أ} \geqslant 0$.

$\sqrt{\text{أ}^2} = -\text{أ}$ إذا كان $\text{أ} < 0$.

1) بالإستعانة بجدول المربعات عيّن كلاًّ من :

$\sqrt{196}$ ؛ $\sqrt{256}$ ؛ $\sqrt{225}$ ؛ $\sqrt{9409}$

2) عيّن كلاًّ من :

$\sqrt{(-5)^2}$ ؛ $\sqrt{(+6)^2}$ ؛ $\sqrt{(-6)^2}$ ؛ $\sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

3) أكمل الجدول :

مربعه	15	....	81	....	3600		جذره التربيعي
		729	....	784	....	11025	

3. استخراج الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب .

• **مثال 1** : لنحسب $\sqrt{518400}$.

لدينا $518400 = 5184 \times 100$

جدول المربعات يبيّن أن $5184 = 72^2$.

ونعلم أن $100 = 10^2$

نستنتج أن :

$518400 = 72^2 \times 10^2 = (72 \times 10)^2$

إذن : $\sqrt{518400} = \sqrt{(72 \times 10)^2} = \sqrt{(720)^2} = 720$.

إن العدد 720 هو الجذر التربيعي التام للعدد 518400 .

• **مثال 2** : لنحسب $\sqrt{\frac{225}{121}}$:

لدينا $\frac{225}{121} = \frac{15^2}{11^2} = \left(\frac{15}{11}\right)^2$.

إذن $\sqrt{\frac{225}{121}} = \sqrt{\left(\frac{15}{11}\right)^2} = \frac{15}{11}$.

فالعدد $\frac{15}{11}$ هو الجذر التربيعي التام للعدد $\frac{225}{121}$.

مثال 3 : لنحسب $\sqrt{26,01}$.

تعلم أن $26,01 = \frac{2601}{100}$

لكن $2601 = 17^2 \times 3^2$ إذن $26,01 = \frac{17^2 \times 3^2}{10^2}$

نستنتج أن $\sqrt{26,01} = \sqrt{\frac{17^2 \times 3^2}{10^2}} = \sqrt{\left(\frac{17 \times 3}{10}\right)^2} = \frac{17 \times 3}{10} = 5,1$

إذن $\sqrt{26,01} = 5,1$.

• توجد طرق أخرى لإيجاد الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب ، أو إيجاد قيمة مقربة له، كما يظهر في المثال التالي :

مثال 4 : لحساب الجذر التربيعي للعدد 35836 أو لحساب قيمة مقربة له نتبع الطريقة التالية :

1) نجزىء هذا العدد من اليمين إلى اليسار إلى أقسام ، كل قسم يتكون من رقمين فنجد 36 58 3 .

2) نبحث عن عدد موجب د بحيث $د^2 \leqslant 3$ ،
فنجد $\boxed{د = 1}$ لأن $1^2 < 3$.

3) نأخذ ضعف واحد وهو 2 ، ثم نبحث عن رقم ه بحيث :
$ه \times 2ه \leqslant 258$.
نجد بالتجريب أن $\boxed{ه = 8}$

4) نأخذ ضعف العدد 18 وهو 36 .
ثم نبحث عن رقم و بحيث :
$و \times 36و \leqslant 3436$.
نجد أن $\boxed{و = 9}$
إن $9 \times 369 = 3321$.
ولدينا $3436 - 3321 = 115$.
يمكن أن تتحقق أن :
$(189)^2 + 115 = 35836$

3 58 36	189
-1	
2 58	$ه \times 2ه$
$-2\ 24$	$28 \times 8 = 224$
34 36	$و \times 36و$
-3321	$369 \times 9 = 3321$
115	

• العدد 189 يسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة للعدد $\sqrt{35836}$.
والعدد 115 يسمى باقي « عملية استخراج » الجذر التربيعي المقرّب بالنقصان إلى الوحدة للعدد 35836 .

إذا أردنا مواصلة هذه العملية ، أي إيجاد مثلا الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10}$ للعدد 35836 ، فإننا :

1) نضع صفرين عن يمين الباقي 115 فنجد العدد 11500 .

2) نضع فاصلة عن يمين العدد 189 .

3) نأخذ ضعف العدد 189 وهو 378 .

4) نبحث عن رقم ل بحيث : ل × ل 378 ⩽ 11500 .

نجد بالتجريب أن **ل = 3**.

• العدد 189,3 هو القيمة المقرّبة بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد $\sqrt{35836}$.

5. نأخذ ضعف العدد 1893 وهو 3786 ثم نبحث عن رقم ك بحيث :

ك × ك 3786 ⩾ 15100 .

فنجد أن **ك = 0**

3 58 36 − 1	189,30
2 58 − 2 24	2هـ × هـ 28 × 8 = 224
3436 − 3321	36و × و 369 × 9 = 3321
115,00 − 113,49	378ل × ل 3783 × 3 = 11349
1,5100 00000	3786ك × ك 37860 × 0 = 0
1,5100	

• العدد 189,30 هو القيمة المقرّبة بالنقصان إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\sqrt{35836}$.

يمكن مواصلة هذه العملية لإيجاد قيم مقربة أكثر فأكثر للجذر التربيعي للعدد 35836 .

• لاحظ أن : $35836 = (189{,}3)^2 + 1{,}51$.

نكتب $\sqrt{35836} \simeq 189$ ونقرأ الجذر التربيعي للعدد 35836 يساوي 189 بتقريب وحدة بالنقصان .

وأيضا نكتب $\sqrt{35836} \simeq 189{,}3$ ونقرأ الجذر التربيعي للعدد 35836 يساوي 189,3 بتقريب $\frac{1}{10}$ بالنقصان .

ونكتب $\sqrt{35836} \simeq 189{,}30$ ونقرأ الجذر التربيعي للعدد 35836 يساوي 189,30 بتقريب $\frac{1}{10^2}$ بالنقصان .

• العدد الحقيقي 1,51 هو باقي الجذر التربيعي المقرّب بالنقصان إلى $\frac{1}{10^2}$ للعدد 35836 .

مثال 5 : لنحسب الجذر التربيعي التام للعدد 18225 بالطريقة السابقة .

نجد أن : $\sqrt{18225} = 135$

تحقّق أن : $(135)^2 = 18225$.

إن باقي عملية استخراج الجذر التربيعي للعدد 18225 يساوي الصفر فالعدد 18225 هو مربّع تام .

يمكن أن نستنتج ما يلي :

باقي عملية إيجاد الجذر التربيعي لمربع تام يساوي الصفر .

1) أوجد الجذر التربيعي المقرّب بالنقصان إلى $\frac{1}{10^3}$ لكل من الأعداد الموجبة التالية : 7 ؛ 10 ؛ 13 .

2) أوجد الجذر التربيعي المقرّب بالنقصان إلى $\frac{1}{10^3}$ لكل من :

81412 ؛ 79465 ؛ 471229 .

الحسابات على الجذور التربيعية

1. الجذر التربيعي لجداء :

مسألة 1 : أ ، ب عددان حقيقيان موجبان .

لنبرهن أن $\sqrt{\text{أ}\,\text{ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$.

نضع $\text{س} = \sqrt{\text{أ}}$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{ب}}$.

فيكون $\text{س}^2 = \text{أ}$ ، $\text{ع}^2 = \text{ب}$.

ونستنتج أن : $\text{س}^2\,\text{ع}^2 = \text{أ} . \text{ب}$.

بما أن أ موجب و ب موجب فإن $\text{أ}\,\text{ب}$ موجب أي : $\text{س}^2\,\text{ع}^2$ موجب

$(\text{س}\,\text{ع})^2 = \text{أ} . \text{ب}$

$(\text{س} . \text{ع})^2 = \text{أ} . \text{ب}$ يعني أن $\text{س}\,\text{ع} = \sqrt{\text{أ} . \text{ب}}$

وبما أن $\text{س} = \sqrt{\text{أ}}$ و $\text{ع} = \sqrt{\text{ب}}$

فإن $\boxed{\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ}\,\text{ب}}}$ أو $\boxed{\sqrt{\text{أ}\,\text{ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}}$

أمثلة :

- $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$.
- $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$.
- $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$.

مسألة 2 : لنبرهن على النتيجة التالية :

> إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين فإن :
> $\sqrt{أ^2 ب} = أ\sqrt{ب}$

البرهان :

أ ، ب عددان حقيقيان موجبان .

نعلم من المسألة السابقة أن : $\sqrt{أ^2 ب} = \sqrt{أ^2} \times \sqrt{ب}$.

ونعلم أن $\sqrt{أ^2} = |أ| = أ$ لأن أ موجب .

إذن $\sqrt{أ^2 ب} = أ . \sqrt{ب}$

أمثلة : • $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$.

• $5\sqrt{3} = (\sqrt{5^2}) \times \sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$.

• $2\sqrt{98} = 2\sqrt{2 \times 49} = 2\sqrt{2 \times 7^2} = 2 \times 7\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

ملاحظة : أ عدد حقيقي موجب .

$(\sqrt{أ})^2 = \sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = \sqrt{أ^2} = أ$

مثلا : $(\sqrt{3})^2 = 3$ $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

أمثلة : • $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$.

• $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = 3\sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$

• $\sqrt{27} \times \sqrt{12} = \sqrt{27 \times 12} = \sqrt{3^3 \times 2^2 \times 3} = \sqrt{3^4 \times 2^2}$

إذن $\sqrt{27} \times \sqrt{12} = 3^2 \times 2 = 18$.

أيضًا $\sqrt{27} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 9} \times \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3 \times 3^2} \times \sqrt{3 \times 2^2}$

$\sqrt{27} \times \sqrt{12} = 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 3 \times (3 \times 2) = 18$.

يمكن أن نكتب : $3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2\,(\sqrt{3} \times \sqrt{3})$.

$$3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \times 3 = 18 .$$

1) اكتب على شكل جداء عدد ناطق وعدد أصم كلاًّ مما يلي :
$\sqrt{32}$ ؛ $\sqrt{40}$ ؛ $\sqrt{63}$ ؛ $\sqrt{75}$ ؛ $\sqrt{80}$ ؛ $\sqrt{180}$.

2) اكتب على أبسط شكل ممكن كلا من الجداءات التالية :
$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ ؛ $-\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ ؛ $2\sqrt{3} \times \sqrt{6}$.
$5\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{32}$ ؛ $\sqrt{\frac{5}{3}} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$.

2) ـ الجذر التربيعي لحاصل قسمة .

مسألة : أ ، ب عددان حقيقيان موجبان و $\text{ب} \neq 0$

لنبرهن أن $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$.

البرهان : نعلم أن : ($\text{س} = \sqrt{\text{أ}}$ معناه $\text{س}^2 = \text{أ}$)

وأن : ($\text{ع} = \sqrt{\text{ب}}$ معناه $\text{ع}^2 = \text{ب}$)

نستنتج أن $\frac{\text{س}^2}{\text{ع}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

أو $\left(\frac{\text{س}}{\text{ع}}\right)^2 = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ وهذا يعني أن $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$.

وبما أن س = $\sqrt{أ}$ ، ع = $\sqrt{ب}$

إذن $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$

أو $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$.

أمثلة :

$\frac{13}{20} = \frac{\sqrt{(13)^2}}{\sqrt{(20)^2}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{400}} = \sqrt{\frac{169}{400}}$ ؛ $\frac{7}{6} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \sqrt{\frac{49}{36}}$

$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{15}{35}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{35}}$.

- $0,62 = \frac{62}{100} = \frac{\sqrt{3844}}{\sqrt{10000}} = \sqrt{\frac{3844}{10000}} = \sqrt{0,3844}$

- $\frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{25}}{14} = \frac{\sqrt{7 \times 25}}{\sqrt{(14)^2}} = \frac{\sqrt{175}}{\sqrt{196}} = \sqrt{\frac{175}{196}}$.

تطبيق : لنحسب الجذر التربيعي المقرّب بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد 27,594 .

نعلم أن : $27,594 = \frac{27594}{10^3}$.

$27,594 = \frac{275940}{10^4}$ (حيث جعلنا أس المقام زوجيا) .

إذن $\sqrt{27,594} = \sqrt{\dfrac{275940}{10^4}} = \dfrac{\sqrt{275940}}{\sqrt{10^4}}$

$$\sqrt{27,594} = \frac{\sqrt{275940}}{10^2}$$

وبما أن $\sqrt{275940} \simeq 525$

إذن $\sqrt{27,594} \simeq \dfrac{525}{10^2}$

أي $\sqrt{27,594} \simeq 5,25$

5,25 هو الجذر التربيعي للعدد 27,594 بتقريب $\dfrac{1}{10^2}$ بالنقصان .

ويكون الجذر التربيعي المقرب إلى $\dfrac{1}{10}$ للعدد 27,594 هو 5,2 .

بصفة عامة :

لحساب الجذر التربيعي التام أو المقرب لعدد عشري

نكتب هذا العدد علي شكل كسر عشري مقامه قوة للعدد 10 وأس هذه القوة عدد طبيعي زوجي . يلاحظ عندئذ أن بسط هذا الكسر عدد طبيعي نبحث عن جذره التربيعي بإحدى الطرق السابقة .

• أوجد كلاً من $\sqrt{1600}$ ؛ $\sqrt{0,81}$ ؛ $\sqrt{0,94}$.

• احسب بأبسط كيفية ممكنة كلاً من :

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} \text{ ؛ } \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{15}} \text{ ؛ } \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{597}}$$

• أكمل كلاً مما يلي :

$$\sqrt{\frac{25}{7}} = \frac{\dots}{\sqrt{7}} \text{ ؛ } \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\dots}{\dots} \text{ ؛}$$

$$\sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

• احسب كلاً مما يلي :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{6} \text{ ؛ } \sqrt{\frac{5}{3}} \times \sqrt{15} \text{ ؛ } \sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\sqrt{21} \times \sqrt{\frac{3}{7}} .$$

3) ـ الجذر التربيعي لمجموع أو لفرق عددين

1) هل العددان $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ و $\sqrt{36 + 64}$ متساويان ؟

نعلم أن : $\sqrt{64} = 8$ و $\sqrt{36} = 6$

إذن : $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 14$

ولدينا : $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

نستنتج أن : $\sqrt{64} + \sqrt{36} \neq \sqrt{36 + 64}$

2) هل العددان $\sqrt{169} - \sqrt{144}$ و $\sqrt{169 - 144}$ متساويان ؟

تعلم أن : $\sqrt{169} = 13$ و $\sqrt{144} = 12$

إذن : $\sqrt{169} - \sqrt{144} = 13 - 12 = 1$

ولدينا : $\sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

إذن : $\sqrt{169 - 144} \neq \sqrt{169} - \sqrt{144}$

بصفة عامة

أ ، ب عددان حقيقيان موجبان

1) $\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}} \neq \sqrt{\text{أ} + \text{ب}}$

2) $\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}} \neq \sqrt{\text{أ} - \text{ب}}$ ؛ (حيث أ > ب)

تطبيق :

لنحسب المجموع م التالى :

م $= 2\sqrt{20} + 3\sqrt{50} - 10\sqrt{18} + 4\sqrt{27}$

• لاحظ أن : $20 = 2^2 \times 5$ ، $50 = 2 \times 5^2$ ، $18 = 2 \times 3^2$ ، $27 = 3^3$

فيكون م $= 2\sqrt{2^2 \times 5} + 3\sqrt{2 \times 5^2} - 10\sqrt{2 \times 3^2} + 4\sqrt{3^3}$

م $= 2 \times 2\sqrt{5} + 3 \times 5\sqrt{2} + 10 \times 3\sqrt{2} + 4 \times 3\sqrt{3}$

م $= 4\sqrt{5} + 15\sqrt{2} - 30\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$

م $= 4\sqrt{5} + (15 - 30)\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$

م $= 4\sqrt{5} - 15\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$

• احسب المجموع التالى :

ن $= \sqrt{72} - 2\sqrt{45} - \sqrt{98} + \sqrt{125}$

ل $= \sqrt{288} + \sqrt{252} - \sqrt{500} - \sqrt{567}$

تطبيقات

1 ـ تعلم أنه إذا كان س ، ع عددين حقيقيين فإن :

$$(\text{س} + \text{ع})(\text{س} - \text{ع}) = \text{س}^2 - \text{ع}^2 .$$

نستنتج القواعد التالية :

1) إذا كان ب عددًا حقيقيًا موجبًا فإن :

$$(\text{أ} + \sqrt{\text{ب}})(\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}) = \text{أ}^2 - (\sqrt{\text{ب}})^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}$$

2) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين فإن :

$$(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}})(\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}}) = (\sqrt{\text{أ}})^2 - (\sqrt{\text{ب}})^2 = \text{أ} - \text{ب}$$

أمثلة :

- $(-3 + \sqrt{7})(-3 - \sqrt{7}) = (-3)^2 - (\sqrt{7})^2 = 9 - 7 = 2$
- $(\sqrt{11} - \sqrt{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{8})^2 = 11 - 8 = 3$
- $(2\sqrt{5} + \sqrt{23})(2\sqrt{5} - \sqrt{23}) = (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{23})^2 = 4 \times 5 - 23 = -3$

احسب ما يلي :

$(5\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(5\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ ؛ $(9 + 2\sqrt{7})(9 - 2\sqrt{7})$ ؛

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right) .$$

---

2 ـ تذكّر أنه إذا كانت $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ نسبة معلومة و ك عدد حقيقي غير معدوم فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ك أ}}{\text{ك ب}}$$

مثال 1 : لنبحث عن نسبة تساوي النسبة $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$ يكون مقامها عددًا ناطقًا

تعلم أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{أ ك}{ب ك}$ حيث النسبة $\frac{أ}{ب}$ معلومة و ك عدد حقيقي غير معدوم

لاحظ أن : $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ إذن يمكن أن نختار مثلا ك $= \sqrt{5}$.

فيكون $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

مثال 2 : لنبحث عن نسبة تساوي النسبة $\frac{1}{6 + \sqrt{2}}$ يكون مقامها عددًا ناطقًا .

لاحظ أن : $(6 + \sqrt{2})(6 - \sqrt{2}) = 36 - 2 = 34$.

فيكون $\frac{1}{6 + \sqrt{2}} = \frac{1 \times (6 - \sqrt{2})}{(6 + \sqrt{2})(6 - \sqrt{2})} = \frac{6 - \sqrt{2}}{36 - 2} = \frac{6 - \sqrt{2}}{34}$.

مثال 3 : لنبحث عن نسبة تساوي النسبة $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}$ يكون مقامها عددًا ناطقًا .

لاحظ أن : $(\sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = 3 - 6 = -3$.

فيكون :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)}{(\sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{6})} = \frac{3 + \sqrt{18}}{3 - 6} = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{-3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{-3} = \frac{(1 + \sqrt{2})}{-1} = -(1 + \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2}$$

مثال 4 : لنحسب المجموع التالى :

$$م = \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

لدينا :

• $$\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3\,(\sqrt{3}+1)}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

• $$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

• $$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{4\,(\sqrt{3}-\sqrt{6})}{(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{3-6}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{-3} = \frac{4\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{3}.$$

$$م = \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{3}$$

$$م = \frac{3\,(\sqrt{3}+1) + 3\times(3\sqrt{2}) - 2\,(4\sqrt{6}-4\sqrt{3})}{6}$$

$$م = \frac{3\sqrt{3}+3+9\sqrt{2}-8\sqrt{6}+8\sqrt{3}}{6} = \frac{11\sqrt{3}+9\sqrt{2}-8\sqrt{6}+3}{6}$$

تمارين

1. بيّن أن كلاًّ من الأعداد الآتية هو مربع لعدد طبيعي يطلب تعيينه :
$3^2 \times 3 \times 12$ ؛ $2^2 \times 3 \times 36 \times 12$ ؛ $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 15$ ؛
$3 \times 105 \times 15 \times 21$ ؛

2. حلّل إلي جداء عوامل أولية كلاًّ من الأعداد الآتية ، ثم عيّن الأعداد التي هي مربّعات :
192 ؛ 441 ؛ 2025 ؛ 3468 ؛ 2401 ؛ 12544 .

3. بيّن أن كلاًّ من الجداءات الآتية هو مربع لعدد صحيح يطلب تعيينه :
$(-3)^2 \times (-63) \times (-28)$ ؛ $(-35) \times (-5)^3 \times 7$ ؛
$(-7)^5 \times (-5)^3 \times 35$.

4. عيّن الجذر التربيعي التام لكل من الأعداد الآتية :
1521 ؛ 1156 ؛ 2601 ؛ 11664 ؛ 441 .

5. عيّن الجذر التربيعي التام لكل من الأعداد الآتية :
$\frac{121}{144}$ ؛ $\frac{625}{841}$ ؛ $\frac{324}{1225}$ ؛ $\frac{9604}{11025}$ ؛ $\frac{169}{1521}$.

6. 1) أكتب العدد 4212 علي شكل جداء عوامل أولية ؛
نضع $ح = 4212 \times ب$.
عيّن أصغر قيمة للعدد ب حتّي يكون ح مربعًا لعدد طبيعي يطلب تعيينه .
2) نفس السؤال من أجل العدد 8820 .

7. عيّن الجذور التربيعية الآتية :
$\sqrt{[(-3) \times 7]^2}$ ؛ $\sqrt{11 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^2}$ ؛
$\sqrt{\left(-\frac{17}{2}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)^2}$

8. احسب الجذر التربيعي بالنقصان إلي وحدة لكل من الأعداد الآتية :
99347 ؛ 112896 ؛ 9541,81 ؛ 1783,41 ؛ 4001328 .

9. احسب الجذر التربيعي المقرّب إلي $\frac{1}{10}$ (أى 0,1) بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

8477 ؛ 25817 ؛ 0,0472 ؛ $\frac{3479}{100}$ ؛ 37,421 .

10. احسب الجذر التربيعي المقرّب إلي $\frac{1}{10^2}$ (أى 0,01) بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

28416 ؛ 375 ؛ 1,75 ؛ 1,75 ؛ 738,4 ؛ $\frac{22}{7}$ ؛ 0,039 .

11. احسب الجذر التربيعي المقرّب إلي $\frac{1}{10^3}$ (أى 0,001) بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

$\frac{9}{10}$ ؛ 1,7824 ؛ 0,03542 ؛ 312 ؛ $\frac{34792}{10^2}$

12. عيّن بالديسمتر أطوال أضلاع المربعات التي أقياس مساحاتها هى :
618 دم^2 ؛ 64,49 م^2 ؛ 123,45 م^2 ؛ 132,38 س آر .

13. مساحة قطعة أرض مستطيلة الشكل هى 9548 م^2 ، عرضها $\frac{4}{7}$ طولها .

أحسب بتقريب $\frac{1}{10}$ بالنقصان طول وعرض هذه القطعة .

ملاحظة : تعطي النتائج في التمرينين 12 ، 13 بتقريب $\frac{1}{10}$ بالنقصان .

14. احسب بالديسمتر بعدى مستطيل طوله ضعف عرضه ومساحته 22050 م^2 .

15. احسب بتقريب $\frac{1}{10}$ بالنقصان كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

$\sqrt{84}+\sqrt{138}-\sqrt{196}$ ؛ $\sqrt{68}-\sqrt{57}+\sqrt{116}$.

16. احسب الجداءات الآتية :

1) $\sqrt{18}\times\sqrt{8}$ ؛ $\sqrt{126}\times\sqrt{14}$ ؛ $\sqrt{27}\times 6\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{2,4}\times\sqrt{0,6}$.

2) $\sqrt{45}\times\sqrt{48}\times\sqrt{75}$ ؛ $5\sqrt{72}\times 3\sqrt{50}$ ؛ $\sqrt{3,2}\times\sqrt{0,8}$.

3) $2\sqrt{63}\times 3\sqrt{7}$ ؛ $\sqrt{4,5}\times\sqrt{0,18}$ ؛ $5\sqrt{45}\times 7\sqrt{5}$ ؛

$\sqrt{0,01}\times\sqrt{0,18}$.

17. احسب الجداءات الآتية :

1) $\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{12}$ ؛ $2\sqrt{\frac{2}{27}}\times\sqrt{\frac{3}{8}}$ ؛

$3\sqrt{\frac{8}{5}}\times\sqrt{\frac{45}{18}}$.

2) $\sqrt{45}\times\sqrt{\frac{1}{5}}$ ؛ $\sqrt{75}\times\sqrt{\frac{1}{27}}$ ؛ $7\times\sqrt{\frac{30}{49}}$ ؛ $4\sqrt{\frac{26}{5}}\times\sqrt{\frac{65}{8}}$.

18. احسب المجاميع الآتية :

1) $\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{4}$ ؛ $\sqrt{1,21}+\sqrt{0,49}-\sqrt{0,64}$ ؛

$\sqrt{0,16}-\sqrt{0.25}+\sqrt{1,69}$.

2) $\sqrt{2,25}+\sqrt{81}-\sqrt{1,96}$ ؛ $\sqrt{25}+\sqrt{144}-\sqrt{16}$ ؛

$\sqrt{0,25}+\sqrt{0,16}-\sqrt{0,09}$.

19. احسب كلاً من المجاميع الآتية :

1) $\sqrt{54}-\sqrt{6}+\sqrt{24}$ ؛ $\sqrt{20}+2\sqrt{5}-\sqrt{45}$ ؛ $4\sqrt{2}-\sqrt{8}+\sqrt{18}$.

2) $5\sqrt{28} + 3\sqrt{175} - \sqrt{252}$ ؛ $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{25}{12}}$ ؛

$3\sqrt{96} - \sqrt{150} + \sqrt{726}$.

3) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ؛ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{10} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$ ؛

$6\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{12}{2}} + 5\sqrt{12} - \sqrt{\frac{3}{16}}$.

20. انشر كلاً مما يلي:

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ ؛ $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ ؛

$(3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})$.

21. اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$\frac{231}{\sqrt{3} - 2}$ ؛ $\frac{1}{5 - \sqrt{5}}$ ؛ $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ ؛ $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ ؛ $\frac{3}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$.

22. 1) اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$ ؛ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

2) احسب $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

23. اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$\frac{2}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ ؛ $\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}$ ؛ $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{2\sqrt{7} + \sqrt{2} + 3}$.

24. 1) اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

أ $= \frac{1}{\sqrt{5}}$ ؛ ب $= \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ ؛ ح $= \frac{\sqrt{5}-2}{5-2\sqrt{5}}$.

2) احسب المجموع م = أ + ب − ح .

3) احسب $\sqrt{5}$ بتقريب $\frac{1}{10^2}$ أى 0,01 واستنتج قيمة المجموع م بتقريب 0,01 بالنقصان .

25. 1) تحقق أن $9 + 4\sqrt{5} = 2^2 + (\sqrt{5})^2 + 2(2\sqrt{5}) = (2+\sqrt{5})^2$

2) برهن أن كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية هو مربع مجموع أو فرق عددين حقيقيين :

$9 - 4\sqrt{5}$ ؛ $6 + 2\sqrt{5}$ ؛ $10 - 2\sqrt{21}$ ؛ $16 - 6\sqrt{7}$.

26. احسب في كل حالة أ^2 ، ب^2 ثم استنتج العلاقة بين أ ، ب في كل مما يلى :

أ $= 2 + \sqrt{3}$ و ب $= \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

أ $= 2 - 2\sqrt{3}$ و ب $= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

أ $= \sqrt{3} + \sqrt{5}$ و ب $= \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$.

أ $= 3 - \sqrt{2}$ و ب $= \sqrt{44 - 24\sqrt{2}}$.

27. انشر كلاً مما يلى :

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ ، $(2\sqrt{5} + 2)^2$ ؛ $(1 - \sqrt{7})^2$ ؛ $\left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ ؛

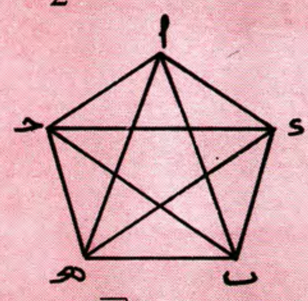
$(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$ ؛ $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$ ؛

$\left(\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{8}}{4}\right)$.

العدد الذهبي

وجد الرياضيون القدامى أن :

- نسبة طول ضلع خماسي نجمي منتظم إلى طول ضلع الخماسي المحدب الذي له نفس الرؤوس ، تساوي العدد الأصم $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



مثلا في الشكل لدينا $\frac{اب}{اد} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

- إذا كانت [اب] قطعة مستقيمة و م نقطة من [اب] بحيث $\frac{اب}{ام} = \frac{ام}{مب}$ ، فإن $\frac{اب}{ام} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

ا ــــــــــــ م ــــــــ ب

النسبة $\frac{اب}{ام}$ هي **نسبة عجيبة** ! !

العدد الأصم $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ يسمى **العدد الذهبي** .

للعدد الذهبي تطبيقات عديدة في فنون الزخرفة المعمارية .

6 المعـالـم

المعلم الخطي

1. المحور :

(ﻫ) مستقيم ، $\overleftarrow{و}$ شعاع غير معدوم له منحى (ﻫ) (الشكل 1) .

الشكل 1

الثنائية المرتبة (ﻫ ، $\overleftarrow{و}$) تسمى **محوراً** .

- المستقيم (ﻫ) يسمى **حامل المحور** (ﻫ ، $\overleftarrow{و}$) .
- الشعاع $\overleftarrow{و}$ يسمى **شعاع الوحدة** للمحور (ﻫ ، $\overleftarrow{و}$) .

نتفق على أن :

اتجاه الشعاع $\overleftarrow{و}$ هو **الاتجاه الموجب** لهذا المحور ، والاتجاه المعاكس هو **الاتجاه السالب** .

2. القيس الجبري لشعاع :

(ﻫ ، $\overleftarrow{و}$) محور ، $\overleftarrow{ش}$ شعاع يوازي $\overleftarrow{و}$.
بما أن الشعاعين $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{و}$ متوازيان فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث :

$$\overleftarrow{ش} = س . \overleftarrow{و}$$

- العدد الحقيقي س يسمى **القيس الجبري** للشعاع $\overleftarrow{ش}$ بالنسبة إلى شعاع الوحدة $\overleftarrow{و}$.

ـ إذا كانت أ ، ب نقطتين من (ﻫ) بحيث $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ش}$ فنرمز للقيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{أب}$ بالرمز $\overline{أب}$ ونكتب :

$$\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{أب} = \overline{أب} . \overleftarrow{و}$$

ملاحظة 1 :

إذا كان للشعاعين $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{و}$ نفس الاتجاه فإن القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{ش}$ هو عدد حقيقي **موجب** ؛ وإذا كان $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{و}$ من اتجاهين مختلفين فإن القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{ش}$ هو عدد حقيقي **سالب** .

ملاحظة 2 :

القيس الجبري لشعاع معدوم هو العدد الحقيقي المعدوم ، لأن :
$$\overleftarrow{0} = 0 \,.\, \overleftarrow{و}$$

(م ، $\overleftarrow{و}$) محور ؛ ا ، ب نقطتان من (م) .
- عيّن القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{اب}$ في كل من الحالات الآتية :

$\overleftarrow{اب} = -\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{اب} = -\frac{3}{4}\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{اب} = -\sqrt{3}\,\overleftarrow{و}$.

---

3. علاقة شال :

(م ، $\overleftarrow{و}$) محور ؛ ا ، ب ، ح ثلاث نقط من (م) .

نعلم أن $\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{اح} + \overleftarrow{حب}$

لكن $\overleftarrow{اب} = \overline{اب} \,.\, \overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{اح} = \overline{اح} \,.\, \overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{حب} = \overline{حب} \,.\, \overleftarrow{و}$.

فيكون $\overline{اب} \,.\, \overleftarrow{و} = \overline{اح} \,.\, \overleftarrow{و} + \overline{حب} \,.\, \overleftarrow{و}$

ومنه $\overline{اب} \,.\, \overleftarrow{و} = (\overline{اح} + \overline{حب}) \,.\, \overleftarrow{و}$

وبما أن القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{اب}$ بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{و}$ ، وحيد ،

نستنتج أن : $\boxed{\overline{اب} = \overline{اح} + \overline{حب}}$

هذه المساواة تسمى **علاقة شال** .

ملاحظة :

يمكننا أن نجد أيضا علاقات أخرى مثل :

$\overline{\text{ب ح}} = \overline{\text{ب أ}} + \overline{\text{أ ح}}$ ، $\overline{\text{ح أ}} = \overline{\text{ح ب}} + \overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{أ ح}} = \overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب ح}}$.

(ق ، $\overleftarrow{\text{و}}$) محور ؛ أ ، ب ، ح ، د أربع نقط من المستقيم (ق) .

1) بيّن أن $\overline{\text{أ د}} = \overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب ح}} + \overline{\text{ح د}}$.

2) بيّن أن $\overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{ب ح}} + \overline{\text{ح أ}} = 0$.

4. المعلم الخطي :

تعريف :

(ق ، $\overleftarrow{\text{و}}$) محور .

كل ثنائية مرتبة (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) ، حيث م نقطة من (ق) تسمى **معلما** للمستقيم (ق)

- النقطة م تسمى **مبدأ** المعلم
- والشعاع $\overleftarrow{\text{و}}$ يسمى **شعاع الوحدة** لهذا المعلم .

في الشكل (2) الثنائية (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) هي معلم للمستقيم (ق) .

وتسمى أيضا **معلمًا خطيًا** .

ونقول إن المستقيم (ق) مزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) .

ونقول أيضا إن (ق) مستقيم مدرّج .

(ق) و م

الشكل 2

5. فاصلة نقطة :

تعريف :

(ف) مستقيم مزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) .
فاصلة نقطة ه من المستقيم (ف) بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) هي القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{م ه}$ بالنسبة إلى $\overleftarrow{و}$.

• إذا كان $\overline{م ه}$ = س فإن س هو فاصلة النقطة ه بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)
ونكتب : ه (س) .
ونقرأ « النقطة ه التي فاصلتها س » .

مثال : في الشكل 3 فاصلة النقطة أ بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) هي (+ 3)
نكتب : أ (+ 3)

وفاصلة النقطة ب بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) هي $-\frac{3}{2}$ نكتب ب $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

الشكل 3

ملاحظة :

نعلم أن $\overline{م م}$ = 0
إذن فاصلة النقطة م بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) تساوي 0
نكتب م (0) .
نقبل ما يلي :

مهما يكن العدد الحقيقي س فإنه توجد نقطة وحيدة ه من المستقيم (ف) المزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) ، فاصلتها بالنسبة إلى هذا المعلم هي العدد الحقيقي س .

6. تطبيقات :

(ف) مستقيم مزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) ؛ ا ، ب نقطتان من (ف) ، نرمز لفاصلتيهما بالرمزين $س_ا$ ، $س_ب$ على الترتيب .

أولاً :

ـ لنبرهن أن $\overline{اب} = س_ب - س_ا$

البرهان : بما أن النقط ا ، ب ، م على استقامة واحدة

فلدينا حسب علاقة شال : $\overline{اب} = \overline{ام} + \overline{مب}$

لكن $\overline{ام} = -\overline{ما}$

إذن $\overline{اب} = -\overline{ما} + \overline{مب}$ أي $\overline{اب} = \overline{مب} - \overline{ما}$

ولدينا $\overline{مب} = س_ب$ و $\overline{ما} = س_ا$

نستنتج أن : $\overline{اب} = س_ب - س_ا$

نتيجة :

ا ، ب نقطتان من مستقيم مزود بمعلم .
القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{اب}$ بالنسبة إلى هذا المعلم يساوي **الفرق** بين فاصلة ب وفاصلة ا .

مثال :

إذا كان $س_ا = +\frac{3}{2}$ و $س_ب = -\frac{5}{6}$ فإن :

$\overline{اب} = س_ب - س_ا = \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) = \frac{-10 - 18}{12} = \frac{-28}{12} = -\frac{7}{3}$.

ثانيًا :

ه منتصف القطعة المستقيمة [أب] فاصلتها $س_{ه}$.

ـ لنبرهن أن : $س_{ه} = \frac{س_{أ} + س_{ب}}{2}$

البرهان :

لدينا حسب علاقة شال :

$\overline{مه} = \overline{مأ} + \overline{أه}$ ...... (1)

$\overline{مه} = \overline{مب} + \overline{به}$ ......(2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$\overline{مه} + \overline{مه} = (\overline{مأ} + \overline{أه}) + (\overline{مب} + \overline{به})$.

$2\,\overline{مه} = (\overline{مأ} + \overline{مب}) + (\overline{أه} + \overline{به})$.

وبما أن ه منتصف [أب] فيكون $\overline{أه} + \overline{به} = 0$

إذن $2\,\overline{مه} = \overline{مأ} + \overline{مب}$ أي $\overline{مه} = \frac{\overline{مأ} + \overline{مب}}{2}$

ومنه $\overline{مه} = \frac{س_{أ} + س_{ب}}{2}$

نتيجة :

فاصلة منتصف قطعة مستقيمة تساوي **نصف مجموع** فاصلتي طرفي هذه القطعة .

مثال : إذا كان $س_{أ} = -5$ و $س_{ب} = \frac{3}{2}$ فإن :

$$س_{ه} = \frac{-5 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{-10 + 3}{2}}{2} = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{4} .$$

ثالثًا :

ـ لنعيّن المسافة بين النقطتين ا ، ب أي اب بدلالة $س_ا$ ، $س_ب$.

البرهان :

لدينا $\overrightarrow{اب} = \overline{اب} . \vec{و}$.

ونعلم أن $\overline{اب} = س_ب - س_ا$

فيكون $\overrightarrow{اب} = (س_ب - س_ا) . \vec{و}$ ..... (1)

نعلم أن $\| \overrightarrow{اب} \| = اب$

من (1) نستنتج أن :

$\| \overrightarrow{اب} \| = \| (س_ب - س_ا) . \vec{و} \| = | س_ب - س_ا | . \| \vec{و} \|$.

وبما أن $\| \overrightarrow{اب} \| = اب$ و $\| \vec{و} \| = 1$ فإن :

$$اب = | س_ب - س_ا | \quad \text{أي} \quad اب = | \overline{اب} |$$

مثال : إذا كان $س_ا = 2,3$ و $س_ب = - 5$ فإن :

$اب = | - 5 - 2,3 |$ أي $اب = | - 7,3 | = 7,3$.

ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من المستقيم (س س′) المزود بالمعلم (م ، $\vec{و}$) .

حيث $ا\left(-\frac{3}{2}\right)$ ؛ ب $(+3)$ ، حـ $\left(+\frac{5}{4}\right)$.

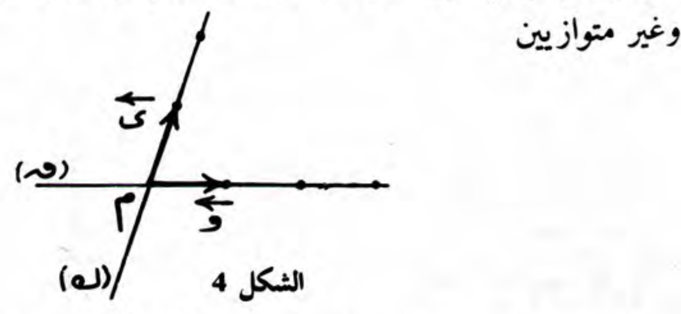
1) احسب $\overline{اب}$ ، $\overline{احـ}$ ، $\overline{بحـ}$ ثم استنتج كلاًّ من اب ، احـ ، بحـ .

2) عيّن $س_د$ ، $س_ك$ ، $س_هـ$ فواصل منتصفات القطع [اب] ، [احـ] ، [بحـ] .

المعالم المستوية

1. المعلم المستوي :

(ق) ، (ك) مستقيمان متقاطعان في نقطة م .
(ق) مزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) ، (ك) مزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) (الشكل 4)
بما أن (ق) و (ك) متقاطعان . فإن الشعاعين $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ غير معدومين وغير متوازيين



الشكل 4

ـ إذا رتبنا عناصر المجموعة الثلاثية { م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ } ، بحيث يكون م هو العنصر الأول ؛ $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ هما العنصران الثاني والثالث فنحصل على مجموعة مرتبة نسميها **ثلاثية مرتبة** ونرمز لها بالرمز (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) .

ـ الثلاثية المرتبة (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) تسمى **معلمًا للمستوي** .

تعريف :

كل ثلاثية مرتبة (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) مركبتها الأولى نقطة من مستو ومركبتاها الثانية والثالثة شعاعان في نفس المستوي غير معدومين وغير متوازيين ، تسمى **معلما** لهذا المستوي .

- نسمي النقطة م **مبدأ** المعلم
- الشعاعان $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ هما شعاعا **الوحدة** لهذا المعلم .
- الثنائية المرتبة ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) تسمى **أساسا** للمستوي .

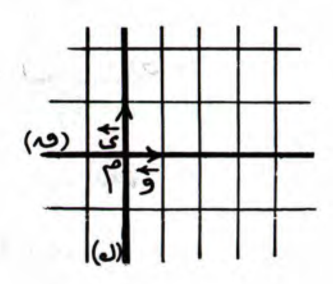
نقول أيضا إن المستوي مزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) .

2 . أنواع المعالم المستوية :

• إذا كان المستقيمان (ه) ، (ك) متعامدين ، فنقول إن المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) **متعامد** . (الشكل 5) .

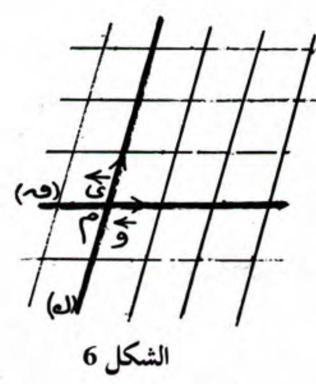
• إذا كان $\|\overleftarrow{و}\| = \|\overleftarrow{ى}\|$ فنقول إن المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) **متجانس** (الشكل 6)

• إذا كان (ه) ، (ك) متعامدين وكان $\|\overleftarrow{و}\| = \|\overleftarrow{ى}\|$ فنقول إن المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) **متعامد ومتجانس** . (الشكل 7) .



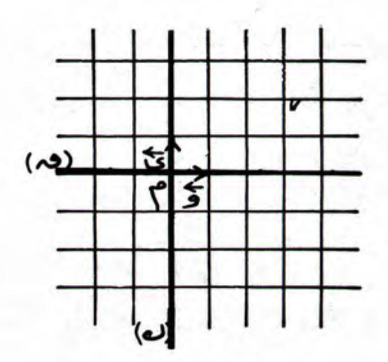
الشكل 5

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد



الشكل 6

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متجانس

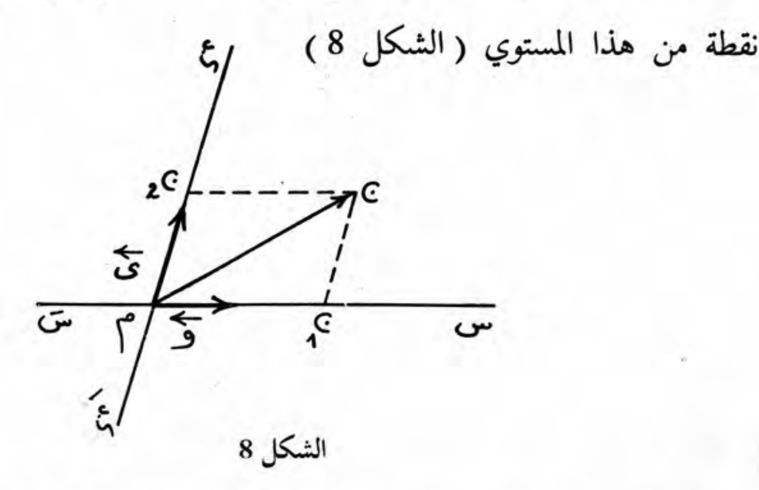


الشكل 7

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس .

3. إحداثيا نقطة :

$(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ى}})$ معلم للمستوي محوراه $\left((\text{س}'\text{س}) ، \overleftarrow{\text{و}}\right)$ و $\left((\text{ع}'\text{ع}) ، \overleftarrow{\text{ى}}\right)$، ن نقطة من هذا المستوي (الشكل 8)



الشكل 8

ـ المستقيم الذي يوازي (ع ع') ويشمل ن يقطع (س س') في نقطة ن_1 .
والمستقيم الذي يوازي (س س') ويشمل ن يقطع (ع ع') في نقطة ن_2 .
نستنتج أن الرباعي $\text{م ن}_1\text{ن ن}_2$ متوازي أضلاع .

ويكون : $\overleftarrow{\text{ن}_1\text{ن}} = \overleftarrow{\text{م ن}_2}$ ؛ $\overleftarrow{\text{م ن}_1} = \overleftarrow{\text{ن}_2\text{ن}}$.

لكن : $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{م ن}_1} + \overleftarrow{\text{ن}_1\text{ن}}$ وأيضا $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{م ن}_2} + \overleftarrow{\text{ن}_2\text{ن}}$.

إذن : $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{م ن}_1} + \overleftarrow{\text{م ن}_2}$

نعلم أنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث $\overleftarrow{\text{م ن}_1} = \text{س} . \overleftarrow{\text{و}}$ حيث س هو فاصلة ن_1 بالنسبة إلى المعلم $(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}})$.

ويوجد عدد حقيقي وحيد ع بحيث $\overleftarrow{\text{م ن}_2} = \text{ع} . \overleftarrow{\text{ى}}$ حيث ع هو فاصلة ن_2 بالنسبة إلى المعلم $(\text{م} ، \overleftarrow{\text{ى}})$.

إذن $\overleftarrow{\text{م ن}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}\,\overleftarrow{\text{ى}}$

مهما كانت النقطة هـ من المستوي المزود بالمعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) فيوجد عددان حقيقيان وحيدان س ، ع بحيث :

$$\overrightarrow{\text{م هـ}} = \text{س}\,\overrightarrow{\text{و}} + \text{ع}\,\overrightarrow{\text{ى}}$$

نقول إن العددين الحقيقيين س ، ع هما **إحداثيا** النقطة هـ بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) .

تعريف :

هـ نقطة من المستوي المزود بالمعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) .
إحداثيا النقطة هـ بالنسبة إلى هذا المعلم هما العددان الحقيقيان س ، ع ، حيث $\overrightarrow{\text{م هـ}} = \text{س}\,\overrightarrow{\text{و}} + \text{ع}\,\overrightarrow{\text{ى}}$.

- نكتب هـ (س ، ع) ونقرأ « النقطة هـ التي إحداثياها س ، ع » .
س يسمى **فاصلة** هـ و ع يسمى **ترتيبها** .

- المحور ((س′س) ، $\overrightarrow{\text{و}}$) يسمى **محور الفواصل** .

- والمحور ((ع′ع) ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) يسمى **محور التراتيب** .

لدينا في (الشكل 9)

أ (+2 ، −1) ، ب $\left(-\frac{1}{2} ، 0 \right)$.

الشكل 9

نقبل ما يلي :

مهما تكن الثنائية (س ، ع) من ح × ح ، فإنه توجد نقطة وحيدة ن من المستوي المزود بمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) ، إحداثياها بالنسبة إلى هذا المعلم هما العددان الحقيقيان س ، ع .

ملاحظات :

1) إذا كانت النقطة ن (س ، ع) تنتمي إلى محور الفواصل ، فإن ترتيبها معدوم أي ع = 0 .
نكتب ن (س ، 0) .

2) إذا كانت النقطة ن (س ، ع) تنتمي إلى محور التراتيب ، فإن فاصلتها معدومة
أي س = 0 .
نكتب ن (0 ، ع) .

3) إحداثيا المبدأ م هما 0 ، 0
نكتب م (0 ، 0) .

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي حيث :
$\|\overleftarrow{و}\| = \|\overleftarrow{ى}\| = 2$ ، وحدة الطول هي السنتيمتر.

1) عيّن في هذا المستوي النقط :

أ (0 ، − 2) ؛ ب $\left(-\frac{3}{2} ، \frac{3}{2}\right)$ ؛ ح $\left(\frac{1}{2} ، 2\right)$ ؛ د (− 1 ، 0) .

2) عيّن إحداثيات نظائر هذه النقط بالنسبة إلى المبدأ م .

3) أوجد إحداثيي النقطة ن في الحالات الآتية :
$\overleftarrow{من} = 5\overleftarrow{و} - 3\overleftarrow{ى}$ ؛ $\overleftarrow{من} = -4\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{من} = 3\overleftarrow{ى}$.

4. مركبتا شعاع :

تعريف :

> $\overrightarrow{\text{ش}}$ شعاع في مستوٍ مزود بمعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) ، ن نقطة من هذا المستوي بحيث
> $\overrightarrow{\text{م ن}} = \overrightarrow{\text{ش}}$.
> نسمي إحداثيي النقطة ن بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) **مركبتي** الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) .

• إذا كان $\overrightarrow{\text{م ن}} = \text{س}\,\overrightarrow{\text{و}} + \text{ع}\,\overrightarrow{\text{ى}}$ فنكتب ن (س ، ع) .

العددان س ، ع هما **مركبتا** الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) .

نكتب : $\overrightarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$

ونقرأ « الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ الذي مركبتاه س ، ع » .

• العدد س يسمى **المركبة الأولى** للشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$.

• والعدد ع يسمى **المركبة الثانية** للشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$.

ملاحظات :

1) إذا كان الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ يوازي الشعاع $\overrightarrow{\text{و}}$ فإن
$\overrightarrow{\text{ش}} = \text{س}\,.\,\overrightarrow{\text{و}}$ يمكن أن نكتب $\overrightarrow{\text{ش}} = \text{س}\,\overrightarrow{\text{و}} + 0\,.\,\overrightarrow{\text{ى}}$.

ويكون $\overrightarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} \text{س} \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) إذا كان $\overrightarrow{\text{ش}}$ يوازي الشعاع $\overrightarrow{\text{ى}}$ **فإن**
$\overrightarrow{\text{ش}} = \text{ع}\,.\,\overrightarrow{\text{ى}}$ ويمكن أن نكتب $\overrightarrow{\text{ش}} = 0\,.\,\overrightarrow{\text{و}} + \text{ع}\,.\,\overrightarrow{\text{ى}}$.

ويكون $\overrightarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{ع} \end{pmatrix}$.

3) مركبتا الشعاع المعدوم هما 0 ، 0 أي $\vec{0} = 0 . \vec{و} + 0 . \vec{ى}$

نكتب $\vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. تطبيقات :

مسألة 1 :

(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) معلم للمستوي ؛ $\vec{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\vec{ل} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ شعاعان في هذا المستوي

– لنبرهن أن مركبتي الشعاع ($\vec{ق} + \vec{ل}$) هما (س + س′) و (ع + ع′) .

البرهان :

$\vec{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ معناه $\vec{ق} = س\vec{و} + ع\vec{ى}$.

$\vec{ل} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ معناه $\vec{ل} = س'\vec{و} + ع'\vec{ى}$

فيكون $\vec{ق} + \vec{ل} = (س\vec{و} + ع\vec{ى}) + (س'\vec{و} + ع'\vec{ى})$.

$\vec{ق} + \vec{ل} = (س + س') \vec{و} + (ع + ع') \vec{ى}$.

هذا يعني أن مركبتي الشعاع ($\vec{ق} + \vec{ل}$) بالنسبة إلى الأساس ($\vec{و}$ ، $\vec{ى}$)

هما (س + س′) و (ع + ع′) .

نكتب $\vec{ق} + \vec{ل} \begin{pmatrix} س + س' \\ ع + ع' \end{pmatrix}$.

مسألة 2 :

ب ، هـ نقطتان من مستو مزود بمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) ، بحيث :

ب (س_1 ، ع_1) و هـ (س_2 ، ع_2) .

ـ لنبحث عن مركبتي الشعاع $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ (الشكل 10)

لدينا $\overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{ب هـ}} = \overleftarrow{\text{م هـ}}$.

أي $\overleftarrow{\text{ب هـ}} = \overleftarrow{\text{م هـ}} - \overleftarrow{\text{م ب}}$.

وبما أن $\overleftarrow{\text{م ب}} = \text{س}_1 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_1 \overleftarrow{\text{ى}}$ ،

و $\overleftarrow{\text{م هـ}} = \text{س}_2 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_2 \overleftarrow{\text{ى}}$ ،

الشكل 10

فإن $\overleftarrow{\text{ب هـ}} = (\text{س}_2 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_2 \overleftarrow{\text{ى}}) - (\text{س}_1 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_1 \overleftarrow{\text{ى}})$.

$\overleftarrow{\text{ب هـ}} = \text{س}_2 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_2 \overleftarrow{\text{ى}} - \text{س}_1 \overleftarrow{\text{و}} - \text{ع}_1 \overleftarrow{\text{ى}}$.

$\overleftarrow{\text{ب هـ}} = (\text{س}_2 - \text{س}_1) \overleftarrow{\text{و}} + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1) \overleftarrow{\text{ى}}$.

وهذا يعني أن مركبتي الشعاع $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ هما ($\text{س}_2 - \text{س}_1$) و ($\text{ع}_2 - \text{ع}_1$) ، بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) .

نكتب $\overleftarrow{\text{ب هـ}} \begin{pmatrix} \text{س}_2 - \text{س}_1 \\ \text{ع}_2 - \text{ع}_1 \end{pmatrix}$

نتيجة :

المركبة الأولى للشعاع $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ تساوي الفرق ($\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}}$)

المركبة الثانية للشعاع $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ تساوي الفرق ($\text{ع}_{\text{هـ}} - \text{ع}_{\text{ب}}$)

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي $\overleftarrow{ه}$ ، $\overleftarrow{ش}$ شعاعان في هذا المستوي حيث :

$\overleftarrow{ه} = 2\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{ش} = -\frac{3}{2}\overleftarrow{ى}$

ـ أوجد مركبتي الشعاع $\overleftarrow{مد}$ في الحالات الآتية :

$\overleftarrow{مد} = 8\overleftarrow{ه} + \frac{1}{2}\overleftarrow{ى}$ ؛ $\overleftarrow{مد} = \frac{3}{4}\overleftarrow{و} - 4\overleftarrow{ش}$ ؛ $\overleftarrow{مد} = -\frac{7}{3}\overleftarrow{ه} + \frac{2}{5}\overleftarrow{ش}$.

مسألة 3 :

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي ؛ $\overleftarrow{ه}$ ، $\overleftarrow{ل}$ شعاعان في هذا المستوي حيث

$\overleftarrow{ه}\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{ل}\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$.

ـ لنبرهن ما يلي :

$\overleftarrow{ه} = \overleftarrow{ل}$ يعني أن س = س' و ع = ع' .

البرهان :

$\overleftarrow{ه} = \overleftarrow{ل}$ معناه $\overleftarrow{ه} - \overleftarrow{ل} = \overleftarrow{0}$.

$\overleftarrow{ه}\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ معناه $\overleftarrow{ه} = س\overleftarrow{و} + ع\overleftarrow{ى}$.

$\overleftarrow{ل}\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ معناه $\overleftarrow{ل} = س'\overleftarrow{و} + ع'\overleftarrow{ى}$

إذن $\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ل}} = (\text{س}\,\overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}\,\overleftarrow{\text{ى}}) - (\text{س}'\,\overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}'\,\overleftarrow{\text{ى}})$.

$\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ل}} = (\text{س} - \text{س}')\,\overleftarrow{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}')\,\overleftarrow{\text{ى}}$

$\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ل}} = \overleftarrow{0}$ معناه $(\text{س} - \text{س}')\,\overleftarrow{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}')\,\overleftarrow{\text{ى}} = \overleftarrow{0}$ وهذا يعني أن $\text{س} - \text{س}' = 0$ و $\text{ع} - \text{ع}' = 0$ (لأن مركبتي الشعاع المعدوم معدومتان معا) .

أي : $\text{س} = \text{س}'$ و $\text{ع} = \text{ع}'$.

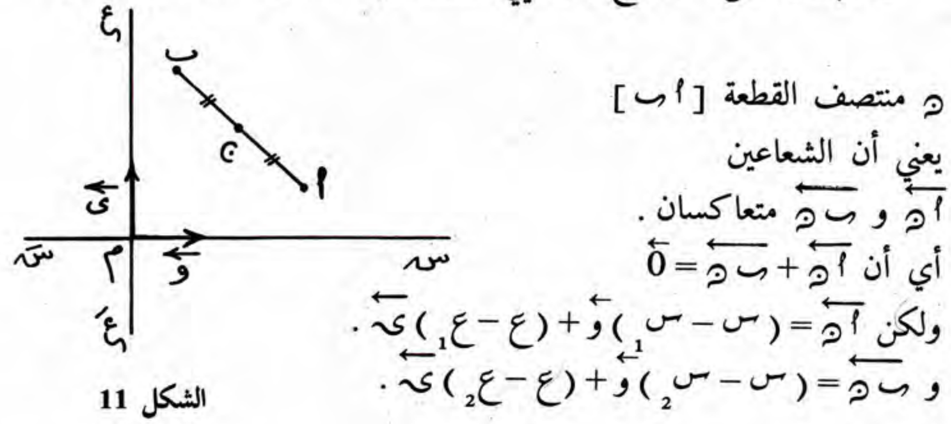
نتيجة :

> $(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ى}})$ معلم للمستوي ، $\overleftarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{\text{ل}}\begin{pmatrix}\text{س}'\\ \text{ع}'\end{pmatrix}$ شعاعان في المستوي
>
> $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ل}}$ **معناه** $\begin{cases}\text{س} = \text{س}' \\ \text{و} \\ \text{ع} = \text{ع}' .\end{cases}$

مسألة 4 :

$(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ى}})$ معلم للمستوي ؛ $\text{أ}(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)$ ، $\text{ب}(\text{س}_2 ، \text{ع}_2)$ نقطتان من هذا المستوي . (الشكل 11) .

ـ لنبحث عن س ، ع إحداثيي النقطة ه منتصف القطعة [أب] .



الشكل 11

ه منتصف القطعة [أب]

يعني أن الشعاعين

$\overleftarrow{\text{أه}}$ و $\overleftarrow{\text{به}}$ متعاكسان .

أي أن $\overleftarrow{\text{أه}} + \overleftarrow{\text{به}} = \overleftarrow{0}$

ولكن $\overleftarrow{\text{أه}} = (\text{س} - \text{س}_1)\,\overleftarrow{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}_1)\,\overleftarrow{\text{ى}}$.

و $\overleftarrow{\text{به}} = (\text{س} - \text{س}_2)\,\overleftarrow{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}_2)\,\overleftarrow{\text{ى}}$.

إذن $(\text{س} - \text{س}_1)\vec{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}_1)\vec{\text{ى}} +$

$$(\text{س} - \text{س}_2)\vec{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}_2)\vec{\text{ى}} = \vec{0}.$$

أي $(\text{س} - \text{س}_1)\vec{\text{و}} + (\text{س} - \text{س}_2)\vec{\text{و}} +$

$$(\text{ع} - \text{ع}_1)\vec{\text{ى}} + (\text{ع} - \text{ع}_2)\vec{\text{ى}} = \vec{0}.$$

$$(\text{س} - \text{س}_1 + \text{س} - \text{س}_2)\vec{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}_1 + \text{ع} - \text{ع}_2)\vec{\text{ى}} = \vec{0}.$$

$$(2\text{س} - \text{س}_1 - \text{س}_2)\vec{\text{و}} + (2\text{ع} - \text{ع}_1 - \text{ع}_2)\vec{\text{ى}} = \vec{0}$$

وهذا يعني أن : $\begin{cases} 2\text{س} - \text{س}_1 - \text{س}_2 = 0 \\ 2\text{ع} - \text{ع}_1 - \text{ع}_2 = 0 \end{cases}$

لأن مركبتي الشعاع المعدوم هما 0 ، 0 .

نستنتج أن $\begin{cases} \text{س} = \dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \\ \text{و} \\ \text{ع} = \dfrac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \end{cases}$

نتيجة :

إذا كانت $(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ع}_2)$ إحداثيات النقطتين ا ، ب في المعلم $(\text{م} ، \vec{\text{و}} ، \vec{\text{ى}})$ فإن إحداثيي منتصف القطعة [اب] هما :

$$\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \text{ و } \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2}.$$

مثال : ا(5 ، -4) ، ب(3 ، 2)

إحداثيا النقطة م منتصف [اب] هما :

$$\text{س} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \text{ و } \text{ع} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

مسألة 5 :

(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) معلم للمستوي ؛ $\vec{ق}\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ شعاع في المستوي .

ك عدد حقيقي .

ـ لنبرهن أن مركبتي الشعاع ك $\vec{ق}$ هما ك س و ك ع .

البرهان :

$\vec{ق}\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ معناه $\vec{ق} = س\,\vec{و} + ع\,\vec{ى}$

ويكون :

ك $\vec{ق}$ = ك (س $\vec{و}$ + ع $\vec{ى}$)

ك $\vec{ق}$ = ك (س $\vec{و}$) + ك (ع $\vec{ى}$) .

ك $\vec{ق}$ = (ك س) $\vec{و}$ + (ك ع) $\vec{ى}$.

وهذا يعني أن مركبتي الشعاع ك $\vec{ق}$ بالنسبة إلى الأساس ($\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) هما ك س و ك ع .

نكتب ك $\vec{ق}\begin{pmatrix} ك\,س \\ ك\,ع \end{pmatrix}$.

مسألة 6 :

(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) معلم للمستوي ؛ $\vec{ق}\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ و $\vec{ق'}\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ شعاعان في هذا المستوي .

ـ لنبرهن أنه إذا كان $\vec{ق} \,//\, \vec{ق'}$ فإن $س\,ع' - ع\,س' = 0$

البرهان :

$\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{ق'}$ يعني أنه يوجد عدد حقيقي ك بحيث $\overleftarrow{ق}$ = ك . $\overleftarrow{ق'}$

إذا كان $\overleftarrow{ق'} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ فإن ك $\overleftarrow{ق'} \begin{pmatrix} ك س' \\ ك ع' \end{pmatrix}$

وبما أن $\overleftarrow{ق}$ = ك $\overleftarrow{ق'}$ فإن $\begin{cases} س = ك س' \quad .... (1) \\ ع = ك ع' \quad ....(2) \end{cases}$

من (1) يكون س ع' = ك س' ع'

ومن (2) س' ع = ك س' ع'

نستنتج أن س ع' = س' ع ، أي س ع' − ع س' = 0 .

نتيجة :

$\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{ق'} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ شعاعان في المستوي المزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

إذا كان $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{ق'}$ فإن س ع' − ع س' = 0

نقبل ما يلي :

$\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{ق'} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ شعاعان في المستوي المزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

إذا كان س ع' − ع س' = 0 فإن $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{ق'}$.

مثلا :

• الشعاعان $\overleftarrow{ش_1} \begin{pmatrix} 2- \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{ش_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3-}{4} \end{pmatrix}$ متوازيان لأن :

$$(-2)\times\left(-\frac{3}{4}\right)-3\times\frac{1}{2}=0$$

• الشعاعان $\overrightarrow{\text{ش}}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{\text{ش}'}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$ غير متوازيين لأن :

$$(-5)\times 4-3\times(-7)\neq 0$$

1) ـ هل الشعاعان $\overrightarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{\text{ل}}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ متوازيان ؟

ـ هل الشعاعان $\overrightarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{\text{ل}}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ متوازيان ؟

2) أ ، ب ، ح ، د أربع نقط حيث :

$\overrightarrow{\text{أب}}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{\text{بح}}\begin{pmatrix}-10\\12\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{\text{بد}}\begin{pmatrix}\ \\-1\end{pmatrix}$

ـ بيّن أن النقاط أ ، ب ، ح على استقامة واحدة .

ـ بيّن أن النقاط أ ، ب ، د ليست على استقامة واحدة .

تمـاريـن

في التمارين من 1 إلى 6 ، نعتبر المستقيم (ق) مزودًا بمعلم (م ، $\vec{\text{و}}$) .

1. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من (ق) بحيث ا(− 3) ، ب(+ 4) ، حـ(− 1,5) .
احسب $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{احـ}}$ ثم $\overline{\text{اب}}+\overline{\text{بحـ}}$

2) عيّن على المستقيم (ق) النقطتين د ، هـ بحيث :

$\overline{\text{مد}} = +\frac{7}{2}$ ، $\overline{\text{مهـ}} = -2,5$

3) عيّن النقطة ج بحيث $\overline{\text{جهـ}} = -4$.

2. ا ، ب ، حـ ، د أربع نقط من المستقيم (ق) بحيث :
ا(− 5) ، ب(+ 10) ؛ حـ(− 3) ؛ د(+ 7)
1) احسب كلاً من $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{حـد}}$ ، $\overline{\text{دا}}$.
2) تحقّق أن $\overline{\text{اب}}+\overline{\text{بحـ}}+\overline{\text{حـد}}+\overline{\text{دا}}=0$

3. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من (ق) بحيث :
ا(+ 2) ، ب(− 3) ، حـ(− 5) .
1) احسب $\overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{حـا}}$ ، $\overline{\text{اب}}$.
2) تحقّق أن : $\overline{\text{ما}}.\overline{\text{بحـ}}+\overline{\text{مب}}.\overline{\text{حـا}}+\overline{\text{محـ}}.\overline{\text{اب}}=0$.

4. ا ، ب ، حـ نقط من (ق) فواصلها على الترتيب : $-\frac{5}{2}$ ، $-\frac{7}{2}$ ، $+\frac{9}{2}$.
1) احسب فاصلة النقطة ج منتصف [اب] .
2) احسب كلاً من $\overline{\text{حـا}}$ ، $\overline{\text{حـب}}$ ، $\overline{\text{حـج}}$.
3) بيّن أن $\overline{\text{حـا}}+\overline{\text{حـب}}=2\overline{\text{حـج}}$.

5. ا ، ب ، حـ ، د نقط من (ق) بحيث ا(− 5) ؛ ب(− 3) ؛ حـ(+ 1) ؛
د(+ 6)
1) احسب المجموع : $\overline{\text{دا}}.\overline{\text{بحـ}}+\overline{\text{دب}}.\overline{\text{حـا}}+\overline{\text{دحـ}}.\overline{\text{اب}}$

2) احسب فاصلة النقطة ه منتصف القطعة [اب] .

3) احسب فاصلة النقطة ﮬ منتصف القطعة [حء] .

4) احسب العدد الحقيقي $\overline{\text{هﮬ}}$.

5) إذا كانت فواصل النقط ا ، ب ، ح ، ء هي الأعداد ط ، ل ، ى ، ك على الترتيب .

احسب المجموع : $\overline{\text{اب}}.\overline{\text{حء}}+\overline{\text{اح}}.\overline{\text{ءب}}+\overline{\text{بح}}.\overline{\text{اء}}$

بدلالة الأعداد ط ، ل ، ى ، ك .

6. ا ، ب ، ح ، ء نقط من مستقيم (ق) فواصلها على الترتيب : – 2 ، 8 ، – 22 ، 2 .

1) احسب فاصلة النقطة ﮬ منتصف القطعة [اب] .

2) احسب كلاً من : $\overline{\text{ﮬا}}$ ، $\overline{\text{ﮬب}}$ ، $\overline{\text{ﮬح}}$ ، $\overline{\text{ﮬء}}$ ، $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اح}}$ ، $\overline{\text{اء}}$.

3) تحقّق أن $(\overline{\text{ﮬا}})^2=\overline{\text{ﮬح}}.\overline{\text{ﮬء}}$.

4) تحقّق أن $\frac{2}{\overline{\text{اب}}}=\frac{1}{\overline{\text{اح}}}+\frac{1}{\overline{\text{اء}}}$.

في التمارين الآتية نعتبر المستوي مزوداً بمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) .

7. إليك الشكل 12 .

حيث $\overleftarrow{\text{ما}}=\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{مب}}=\overleftarrow{\text{ى}}$.

1) أكمل ما يلي :

$\overleftarrow{\text{مح}}=$ .... $\overleftarrow{\text{و}}+$ .... $\overleftarrow{\text{ى}}$.

$\overleftarrow{\text{مء}}=$ .... $\overleftarrow{\text{و}}+$ .... $\overleftarrow{\text{ى}}$.

$\overleftarrow{\text{مه}}=$ .... $\overleftarrow{\text{و}}+$ .... $\overleftarrow{\text{ى}}$.

2) علّم في الشكل 12 النقطتين ﮬ ، ل علما بأن :

$\overleftarrow{\text{مﮬ}}=-3\overleftarrow{\text{و}}+3{,}5\overleftarrow{\text{ى}}$.

$\overleftarrow{\text{مل}}=2{,}5\overleftarrow{\text{و}}-4{,}5\overleftarrow{\text{ى}}$.

الشكل 12

8. أ) ا ، ب نقطتان ، حيث ا $\left(5 ، -\frac{3}{2}\right)$ ؛ ب $\left(-\frac{2}{3} ، 4\right)$.

احسب إحداثيي النقطة ح منتصف القطعة [اب] .

2) ه $\left(-\frac{1}{2} ، \frac{5}{3}\right)$ و ف (− 2,5 ، − 3) .

أوجد إحداثيي النقطة ه′ نظيرة ه بالنسبة إلى المبدأ م .

أوجد إحداثيي النقطة ف′ نظيرة ف بالنسبة إلى م .

9. ((س′س) ، $\overleftarrow{و}$) هو محور الفواصل ، ((ع′ع) ، $\overleftarrow{ى}$) محور التراتيب .

1) أوجد إحداثيات نظائر كل من النقط الآتية بالنسبة إلى (س′س) :

ا $\left(-1 ، \frac{2}{3}\right)$ ؛ ب $\left(2,5 ، -\frac{3}{4}\right)$ ؛ حـ $\left(0 ، -\frac{5}{2}\right)$ ؛ ء(− 3,5 ، 0) .

2) أوجد إحداثيات نظائر كل من النقط الآتية بالنسبة إلى (ع′ع) :

ه (4 ، − 2) ؛ ﻫ $\left(-\frac{7}{4} ، 5\right)$ ؛ ف $\left(-\frac{1}{3} ، 0\right)$ ؛ و $\left(0 ، -\frac{5}{3}\right)$.

في التمارين من 12 إلى 16 نعتبر (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلما للمستوي .

10. ا ، ب نقطتان من هذا المستوي ، بحيث :

ا(− 5 ، 3) ؛ ب (6 ، − 2) .

1) احسب إحداثيي ه منتصف القطعة [اب] .

2) حـ (5 ، 5) نقطة في نفس المستوي

احسب إحداثيي النقطة ث مركز ثقل المثلث ابحـ .

3) تحقّق أن $\overleftarrow{ثا} + \overleftarrow{ثب} + \overleftarrow{ثحـ} = \overleftarrow{0}$

11. ابحـ مثلث ؛ (ا ، $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{احـ}$) معلم للمستوي .

1) عيّن في هذا المعلم إحداثيات النقط ا′ ، ب′ ، حـ′ منتصفات القطع [بحـ] ، [حـا] ، [اب] على الترتيب .

2) بيّن أن $\overleftarrow{بحـ} = 2 \overleftarrow{حـ′ب′}$.

12. 1) علّم النقط ا(− 2 ، 1) ؛ ب (4 ، − 1) ؛ حـ (5,5 ، 3,5) ؛ ﻫ (1 ، − 2) ، ء (1 ، 2) .

بالنسبة إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

2) احسب بالنسبة إلى هذا المعلم مركبات الأشعة :
$\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{احـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{اد}}$ ، $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{بد}}$ ، $\overleftarrow{\text{بهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حد}}$ ، $\overleftarrow{\text{حهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{دهـ}}$.

3) بيّن أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{احـ}}$ و $\overleftarrow{\text{اد}}$ متوازيان وأن $\overleftarrow{\text{اد}}$ و $\overleftarrow{\text{بهـ}}$ متوازيان ، وأن الشعاعين $\overleftarrow{\text{اهـ}}$ و $\overleftarrow{\text{بد}}$ متعاكسان .

13. 1) هل الشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{\text{ك}}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ ؟

2) هل الشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{\text{ك}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ؟

3) هل الشعاع $\overleftarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{\text{ك}}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ ؟

14. 1) عيّن في المستوي المزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) النقط :
ا(1 ، 2) ؛ ب(−3 ، 4) ؛ حـ(−5 ، 5) .

2) بيّن أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{احـ}}$ متوازيان واستنتج أن النقط ا ، ب ، حـ على استقامة واحدة .

15. $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ شعاعان غير معدومين وغير متوازيين .

1) $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان بحيث :

$$\overleftarrow{\text{ق}} = -\frac{3}{2}\overleftarrow{\text{و}} + 5\overleftarrow{\text{ى}} \text{ ؛ } \overleftarrow{\text{ك}} = 3\overleftarrow{\text{و}} - \frac{2}{3}\overleftarrow{\text{ى}} .$$

احسب مركبتي كل من الشعاعين ($\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$) و ($\overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{ك}}$) بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) .

2) $\overleftarrow{\text{ل}}$ شعاع بحيث $\overleftarrow{\text{ل}} = 4\overleftarrow{\text{و}} + \frac{3}{5}\overleftarrow{\text{ى}}$.

اكتب كلاً من الأشعة $2\overleftarrow{\text{ل}}$ ، $-\frac{5}{4}\overleftarrow{\text{ل}}$ ، $-3\overleftarrow{\text{ل}}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) .

16. ا ، ب ، ح ، ى نقط من المستوي المزود بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) بحيث
ا (− 3 ، 4) ؛ ب (5 ، 0) ؛ ح (5 ، − 2) ؛ ى (− 3 ، 2)
1) علّم هذه النقط .
2) برهن أن الرباعي ا ب ح ى متوازي أضلاع .
3) احسب إحداثيي مركز تناظره ﻫ .

17. ا ب ح مثلث . ل ، م ، ﻫ ثلاث نقط بحيث :
$\overleftarrow{ال} = \frac{1}{2}\overleftarrow{اب}$ ؛ $\overleftarrow{حم} = \frac{2}{3}\overleftarrow{حا}$ ؛ $\overleftarrow{بﻫ} = -\frac{3}{5}\overleftarrow{بح}$.
1) عبّر عن كل من الأشعة $\overleftarrow{بح}$ ، $\overleftarrow{حﻫ}$ ، $\overleftarrow{اﻫ}$ ، $\overleftarrow{ام}$ بدلالة الشعاعين $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اح}$
2) عيّن مركبتي كل من الشعاعين $\overleftarrow{لم}$ ، $\overleftarrow{لﻫ}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اح}$) .
3) بيّن أن النقط ل ، م ، ﻫ على استقامة واحدة .

18. ا ب ح مثلث مركز ثقله ث .
1) ﻫ نقطة من المستوي . برهن أن : $\overleftarrow{ﻫا} + \overleftarrow{ﻫب} + \overleftarrow{ﻫح} = 3\,\overleftarrow{ﻫث}$.
2) ا′ هي نظيرة ا بالنسبة إلى ب ؛ ب′ هي نظيرة ب بالنسبة إلى ح ؛ ح′ هي نظيرة ح بالنسبة إلى ا .
– برهن أن ث هي أيضا مركز ثقل المثلث ا′ب′ح′ .
إرشاد : في السؤالين 1) ؛ 2) نستعمل النظرية الآتية :
ث مركز ثقل المثلث ا ب ح معناه $\overleftarrow{ثا} + \overleftarrow{ثب} + \overleftarrow{ثح} = \overleftarrow{0}$.
3) عيّن النقطة ﻫ بحيث $\overleftarrow{اب} = 2\,\overleftarrow{حﻫ}$.
م ، و ، ى هي منتصفات [ا ب] ، [ب ح] ، [ح ا] على الترتيب .
– برهن أن كلاً من الرباعيات ا م و ى ، ى و ﻫ ح ، م ب و ى هو متوازي أضلاع .
4) استنتج أن النقط م ، و ، ﻫ على استقامة واحدة .
وأن ﻫ هي منتصف الضلع [ا′ ب′] .

7 المعادلات وجمل المعادلات

المعادلات من الدرجة الأولى في ع

1. مفهوم المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ع :

• **مسألة** : تا و ها تطبيقان من ع إلى ع حيث :

تا (س) = 5 س − 2 ؛ ها (س) = 3 س + 5 .

ـ أكمل الجدول الآتي بحساب القيم العددية للتطبيقين تا و ها .

س	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1,3	0,6
تا(س) = 5 س − 2			$-\frac{9}{2}$	$\frac{31}{2}$	4,5	
ها(س) = 3 س + 5		8		$\frac{31}{2}$		

لاحظ ما يلي :

1) من أجل س = $\frac{7}{2}$ لدينا تا (س) = ها (س) .

2) من أجل القيم الأخرى للمتغير س ، تا (س) ≠ ها (س) .

• الكتابة تا (س) = ها (س) أي 5 س − 2 = 3 س + 5 تسمى **معادلة** في ع . طرفها الأول تا (س) وطرفها الثاني ها (س) .

ـ المتغير س يسمى **المجهول** وأُسُّه هو 1 لذلك نقول إن هذه المعادلة من **الدرجة الأولى** .

ـ العدد الحقيقي $\frac{7}{2}$ يسمى **حلاً** لهذه المعادلة لأن تا $\left(\frac{7}{2}\right)$ = ها $\left(\frac{7}{2}\right)$.

بينما كل من الأعداد 0 ، 1 ، $-\frac{1}{2}$ ، 1,3 ، 0,6 ليس حلاً لها . (لماذا ؟) .

مجموعة الأعداد الحقيقية س التي يكون من أجلها تا (س) = ها (س) تسمى مجموعة حلول هذه المعادلة ونرمز لها بالرمز مج .

حل معادلة هو إيجاد مجموعة حلولها

أمثلة عن معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ع .

$\sqrt{2}$ س = − 2 ؛ $-\frac{2}{3}$ س + 1 = 5 س ؛ س $\sqrt{2}$ − 3 = $\frac{1}{2}$ س .

$\frac{س + 1}{2} - \frac{س - 3}{3} = 0$.

بعد التحويلات التي نجريها على كلّ من هذه المعادلات نحصل على معادلات من

الشكل : **ا س = ب (حيث ا ≠ 0)**

ملاحظة 1 :

تا (س) = ها (س) معناه تا (س) − ها (س) = 0

تا (س) − ها (س) = 0 هي أيضا معادلة طرفها الأول تا (س) − ها (س) وطرفها الثاني 0 .

ملاحظة 2 :

إذا كان لمعادلتين نفس مجموعة الحلول فنقول إنهما **متكافئتان** .

مثلاً المعادلتان 2 س − 1 = 4 و 2 س − 5 = 0 متكافئتان

وبالعكس : إذا كان لدينا معادلتان متكافئتان ، فكلُّ حلٍّ لإحداهما هو حلٌّ للأخرى .

عمليًا لحل معادلة نستبدلها بمعادلة مكافئة لها أبسط منها .

2. حلّ معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

مثال 1 :

ـ لنحلّ في المجموعة ع المعادلة 5 س − 2 = 3 س + 5 .

أي لنبحث عن مجموعة حلولها .

الحل :

ـ نعلم أن 5 س − 2 = 3 س + 5 يعني أن

5 س − 2 + (− 3 س) = 3 س + 5 + (− 3 س) .

أي 5 س − 2 − 3 س = (3 س − 3 س) + 5

ومنه 2 س − 2 = 5 وهذا يعني أن

(2 س − 2) + 2 = 5 + 2 أي 2 س = 7

إذن س = $\frac{7}{2}$

لنتحقّق أن : تا $\left(\frac{7}{2}\right)$ = ها $\left(\frac{7}{2}\right)$

أي أن : 5 × $\frac{7}{2}$ − 2 = 3 × $\frac{7}{2}$ + 5 .

فمجموعة حلول المعادلة 5 س − 2 = 3 س + 5 هي مج = $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

لاحظ كيفية نقل الحدود من طرف إلى آخر :

$$5\text{س} - 2 = 3\text{س} + 5$$
$$5\text{س} - 3\text{س} = 5 + 2$$

مثال 2 :

ـ لنحلّ في ح المعادلة :

$$2\text{س} + 1 = \frac{3\text{س} - 7}{5}$$

الحل :

$2\text{س} + 1 = \frac{3\text{س} - 7}{5}$ يعني أن $(2\text{س} + 1) - \frac{3\text{س} - 7}{5} = 0$

بعد توحيد المقامين نجد :

$$\frac{5(2\text{س} + 1)}{5} - \frac{3\text{س} - 7}{5} = 0$$

أي $\frac{5(2\text{س} + 1) - (3\text{س} - 7)}{5} = 0$

ومنه $5(2\text{س} + 1) - (3\text{س} - 7) = 0$

$$10\text{س} + 5 - 3\text{س} + 7 = 0$$
$$(10\text{س} - 3\text{س}) + (5 + 7) = 0$$
$$7\text{س} + 12 = 0$$

$7\text{س} = -12$ ومنه $\text{س} = -\frac{12}{7}$

لنتحقّق أن : $2\left(-\frac{12}{7}\right) + 1 = \frac{3\left(-\frac{12}{7}\right) - 7}{5}$.

نستنتج أن : $\text{مج} = \left\{-\frac{12}{7}\right\}$.

- حل في ح المعادلات الآتية :

1) $\frac{\text{س} + 4}{5} - \frac{\text{س} + 116}{4} = 0$

2) $\frac{\text{س} + 4}{3} + \frac{\text{س} - 4}{3} = 2 + \frac{3\,\text{س} - 1}{15}$.

مثال 3 :

- لنحلّ في ح المعادلة : $4(\text{س} + 2) = 5 + 4\,\text{س}$

الحل : لدينا $4(\text{س} + 2) = 5 + 4\,\text{س}$.

أي $4\,\text{س} + 8 = 5 + 4\,\text{س}$

$4\,\text{س} - 4\,\text{س} = 5 - 8$.

أي $0 . \text{س} = -3$

نعلم أنه لا يوجد عدد حقيقي س بحيث $0 . \text{س} = -3$

(لأن $0 . \text{س} = 0$) ، نقول إن مجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة الخالية

أي $\text{مج} = \phi$.

بصفة عامة :

كل معادلة من الشكل 0 . س = ب حيث ب $\neq 0$
ليس لها حل في ع أو مجموعة حلولها هي المجموعة الخالية .

مثال 4 :

لنحلّ في ع المعادلة : 6 س $+ 5 = 2\left(3 \text{ س} + \frac{5}{2}\right)$.

بعد التحويلات اللازمة نحصل على المعادلة :

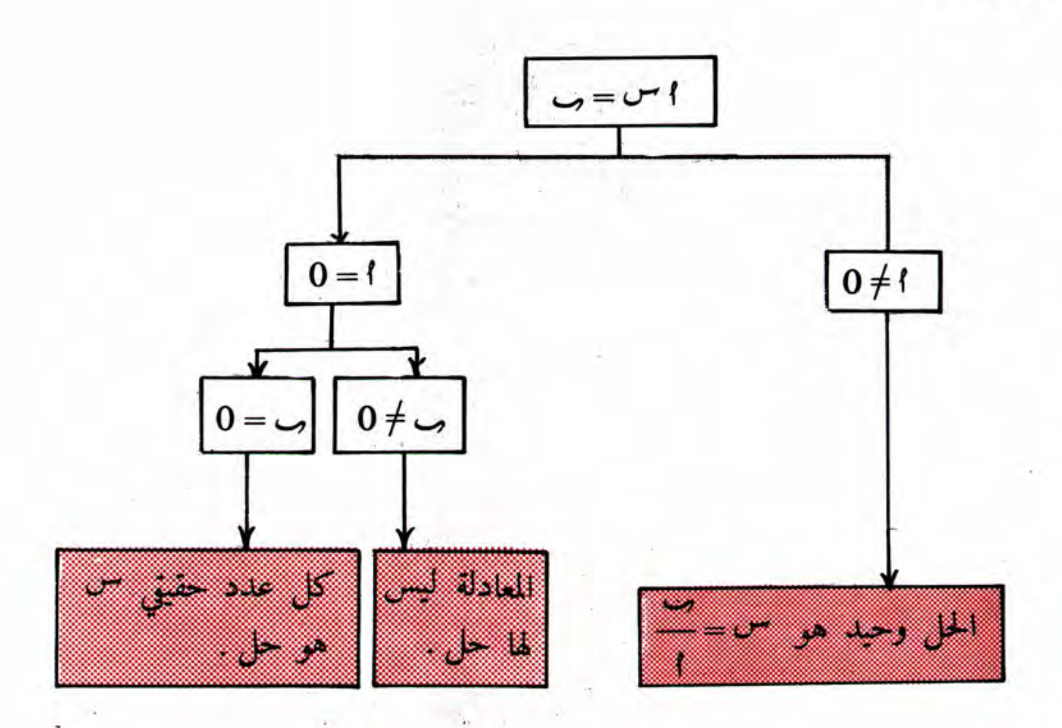
0 . س $= 0$

ـ لاحظ أن كل عدد حقيقي س يحقّق هذه المعادلة .
فمجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة ع .

بصفة عامة :

المعادلة ا س = ب
- لها حلّ وحيد وهو $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ إذا كان ا $\neq 0$.
- لها عدد غير منته من الحلول إذا كان ا $= 0$ ، ب $= 0$
- وليس لها حلّ إذا كان ا $= 0$ و ب $\neq 0$.

خلاصة :



3. حل بعض المعادلات التي تؤول إلى معادلات من الدرجة الأولى في ح :

مثال 1 :

ـ لنحلّ في ح المعادلة $\frac{3}{7}$ س² = $\frac{1}{5}$ س .

الحل :

ـ أكبر أس للمجهول س هو 2 فنقول إن هذه **المعادلة من الدرجة الثانية** .

$\frac{3}{7}$ س² = $\frac{1}{5}$ س يعني أن $\frac{3}{7}$ س² ـ $\frac{1}{5}$ س = 0 ....(1)

لكن $\frac{3}{7}$ س^2 $-$ $\frac{1}{5}$ س $=$ س $\left(\frac{3}{7}\text{ س} - \frac{1}{5}\right)$.

س $\left(\frac{3}{7}\text{ س} - \frac{1}{5}\right) = 0$ معناه

س $= 0$

أو

$\frac{3}{7}$ س $- \frac{1}{5} = 0$

$\frac{3}{7}$ س $- \frac{1}{5} = 0$ يعني أن $\frac{3}{7}$ س $= \frac{1}{5}$ ومنه س $= \frac{7}{15}$.

نستنتج أن العددين 0 ، $\frac{7}{15}$ حلان للمعادلة (1)

لنتحقّق أن $\frac{7}{3}(0)^2 = \frac{1}{5} \times 0$ وأن $\frac{7}{3} \times \left(\frac{7}{15}\right)^2 = \frac{1}{5} \times \frac{7}{15}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي مج $= \left\{0 \text{ ، } \frac{7}{15}\right\}$.

مثال 2 :

ـ لنحلّ في ح المعادلة

3 (س + 5) $-$ 2 س^2 $-$ 10 س $= -$ 7 س $-$ 35 ....(1) .

الحل :

هذه المعادلة من الدرجة الثانية نستبدلها بالمعادلة الآتية :

3 (س + 5) $-$ 2 س^2 $-$ 10 س + 7 س + 35 $= 0$

لاحظ أن $-$ 2 س^2 $-$ 10 س $= -$ 2 س (س + 5)

وأن 7 س + 35 $=$ 7 (س + 5) .

إذن :

$3(س+5) - 2س(س+5) + 7(س+5) = 0$

$(س+5)(3 - 2س + 7) = 0$

$(س+5)(-2س + 10) = 0$

$(س+5)(-س+5) \times 2 = 0$

$2(س+5)(-س+5) = 0$ يعني أن $(س+5)(-س+5) = 0$
(لأن $2 \neq 0$)

وأن $س + 5 = 0$ أو $-س + 5 = 0$

$س + 5 = 0$ يعني أن $س = -5$.

و $-س + 5 = 0$ يعني أن $س = 5$

إذا عوّضنا س بأحد العددين -5 ، 5 في المعادلة (1) نجد أن كلاًّ منهما يحقّق هذه المعادلة .

إذن مج = $\{-5 ، 5\}$

مثال 3 :

ـ لنحلّ في ح المعادلة $9س^2 - 13 = 12$ .....(1)

الحل :

$9س^2 - 13 = 12$ يعني أن $9س^2 - 25 = 0$

$9س^2 - 25 = (3س - 5)(3س + 5)$.

$(3س - 5)(3س + 5) = 0$ معناه [$(3س - 5 = 0)$ أو $(3س + 5 = 0)$].

أي : [$س = \frac{5}{3}$ أو $س = -\frac{5}{3}$]

لنتحقّق أن $9\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 13 = 12$ وأن $9\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 13 = 12$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\left\{\frac{5}{3} ، -\frac{5}{3}\right\}$.

> حلّ في ح المعادلات الآتية :
>
> 1) $4س^2 - \frac{8}{5}س = 0$
>
> 2) $9س^2 - 6س + 1 = 0$
>
> 3) $(3س + 1)(2س - 3) = (س + 2)(3س + 1)$.

جمل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين

1. المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين :

(س ، ع) ثنائية مرتبة من ح × ح .
أكمل الجدول الآتي بحساب القيم العددية لكل من :
$2س + 3ع - 1$ و $5س - 2ع$.

(س ، ع)	(0 ، 1)	$(0 ، \frac{1}{5})$	(0 ، 0)	$(\frac{1}{2} ، \sqrt{3})$	$(-1 ، -\frac{2}{5})$	(1,5 ، 0,3)
$2س + 3ع - 1$	2					
$5س - 2ع$	-2					

تلاحظ من الجدول ما يلي :

1) توجد ثنائيات مرتّبة (س ، ع) من ح × ح بحيث :
2 س + 3 ع − 1 = 5 س − 2 ع .

2) توجد ثنائيات مرتّبة (س ، ع) من ح × ح بحيث :
2 س + 3 ع − 1 ≠ 5 س − 2 ع .

إن 2 س + 3 ع − 1 = 5 س − 2 ع تسمّى **معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين في ح .**

طرفها الأول 2 س + 3 ع − 1 وطرفها الثاني 5 س − 2 ع .

س ، ع هما المجهولان في هذه المعادلة

كل ثنائية مرتّبة (س ، ع) من ح × ح يكون من أجلها :
2 س + 3 ع − 1 = 5 س − 2 ع تسمّى حلاً لهذه المعادلة .

مثلاً (− 2 ، − 1) هي حل لها بينما (1 ، $\frac{1}{5}$) ليست حلاً لهذه المعادلة لأن

$$\left(2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{5} - 1 \neq 5 \times 1 - 2 \times \frac{1}{5} \right) .$$

حلُّ هذه المعادلة هو إيجاد مجموعة حلولها ، أي إيجاد مجموعة الثنائيات المرتبة من ح × ح التي تحقّقها .

ملاحظة 1 :

كلَّما أخذنا قيمة لأحد المجهولين أمكننا حساب قيمة المجهول الآخر وذلك بَحلّ معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .
هذا يعني أن مجموعة حلول معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين هي مجموعة غير منتهية .

مثلاً :

- إذا كان س = 0 فإن 2 × 0 + 3 ع − 1 = 5 × 0 − 2 ع

  أي 3 ع − 1 = − 2 ع ومنه ع = $\frac{1}{5}$

- إذا كان ع = + 2 فإن 2 س + 3 × (+ 2) − 1 = 5 س − 2 (+ 2)

  ومنه 2 س − 5 س = − 6 + 1 − 4

  − 3 س = − 9 .

  أي س = 3

ملاحظة 2 :

(2 س + 3 ع − 1 = 5 س − 2 ع) يعني أن

(2 س + 3 ع − 1) − (5 س − 2 ع) = 0

أي − 3 س + 5 ع − 1 = 0

وبصفة عامة :

> كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين س ، ع تؤول بعد التحويلات اللازمة إلى معادلة من الشكل :
> أ س + ب ع + جـ = 0 حيث أ ≠ 0 ، ب ≠ 0 .
> ومجموعة حلولها هي مجموعة جزئية غير منتهية من ح × ح .

ملاحظة 3 :

المعادلتان المتكافئتان هما معادلتان لهما نفس مجموعة الحلول .

مثلاً : المعادلات الآتية متكافئة :

3 س − 2 ع + 5 = 0 ، − 6 س + 4 ع − 10 = 0 ،

− 2 س + ع − 7 = 4 س − 3 ع + 3 .

2. جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين في ح :

مسألة :

اشترى تلميذ كتابين أحدهما للرياضيات والآخر للعلوم بمبلغ 16 د.ج ، فإذا كان ثمن 5 كتب للرياضيات يزيد 17 د.ج عن ثمن كتابين للعلوم ، فما ثمن كل من الكتابين ؟

تفسير هذه المسألة :

كل من ثمن كتاب الرياضيات وثمن كتاب العلوم مجهول ،
نرمز للأول بالرمز س وللثاني بالرمز ع .
فيكون س + ع = 16 و 5 س = 2 ع + 17 .
كل من س + ع = 16 و 5 س = 2 ع + 17 هي :
معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين .

تعلم أن كلاً من هاتين المعادلتين لها عدد غير منته من الحلول في المجموعة ح × ح .

مثلاً : كل من الثنائيات المرتّبة (6 ، 10) ، (5,5 ، 10,5) ، (7 ، 9) هي حل للمعادلة الأولى .

وكل من الثنائيات المرتّبة (6 ، 6,5) ، (7 ، 9) ، (8 ، 11,5) هي حل للثانية .

لاحظ أن الثنائية المرتّبة (7 ، 9) هي حل مشترك للمعادلتين س + ع = 16 ، 5 س = 2 ع + 17 معًا .

البحث عن مجموعة الحلول المشتركة لهاتين المعادلتين يسمّى حل جملة المعادلتين التي نكتبها على الشكل :

$$\begin{cases} س + ع = 16 \\ 5 س = 2 ع + 17 . \end{cases}$$

بصفة عامة :

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين في المجموعة ح × ح هو إيجاد مجموعة الثنائيات المرتّبة (س ، ع) من ح × ح التي تحقّق المعادلتين في آن واحد .

- وعمليًا لحلّ جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين ، نستبدل كل معادلة بمعادلة أبسط منها ومكافئة لها .

3. حل جملة معادلتين بمجهولين حقيقيين من الدرجة الأولى :

توجد تقنيات تسمح بحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين وتسمّى **طرق حل جملة معادلتين**.

1) طريقة الحل بالتعويض :

مثال : ـ لنحلّ في ح × ح الجملة الآتية بطريقة التعويض .

{ س + ع = 16 .... (1)
{ 5 س = 2 ع + 17 .... (2)

الحل :

نعبّر عن أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين .

مثلاً نستنتج من المعادلة (1) أن س = 16 − ع .

لنعوّض س بالعدد 16 − ع في المعادلة (2) فنجد :

5 (16 − ع) − 2 ع = 17

80 − 5 ع − 2 ع = 17

80 − 7 ع = 17

$$-7\,\text{ع} = 17 - 80$$

$$-7\,\text{ع} = -63 \quad \text{ومنه} \quad \text{ع} = \frac{-63}{-7} .$$

أو $\boxed{\text{ع} = 9}$

نعوّض في المعادلة (1) ع بالعدد 9 فنجد :

$$\text{س} = 16 - \text{ع}$$

$$\text{س} = 16 - 9$$

أي $\boxed{\text{س} = 7}$

نستنتج أن ثمن كتاب الرياضيات هو 7 د.ج ، وثمن كتاب العلوم هو 9 د.ج .

• تحقق أن (7 ، 9) هو حل للجملة $\left\{\begin{array}{l}\text{س} + \text{ع} = 16 \\ 5\,\text{س} = 2\,\text{ع} + 17\end{array}\right.$.

إذن مجموعة حلول هذه الجملة هي مج = $\left\{ (7 ، 9) \right\}$.

- حل في ح × ح كلاً من الجمل الآتية :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{ع}}{3} = 7 \\[2mm] \frac{\text{س}}{3} + \frac{\text{ع}}{2} = 8\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{7}{8}\text{س} + \frac{5}{12}\text{ع} - \frac{7}{10} = 10 \\[2mm] \frac{7}{6}\text{س} + \frac{5}{9}\text{ع} - \frac{14}{15} = 0\end{array}\right.$$

2) طريقة الحل بالجمع :

مثال : لنحل في ح × ح الجملة الآتية بطريقة الجمع :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{س} + \text{ع} = 16 \;\ldots\ldots (1) \\ 5\,\text{س} - 2\,\text{ع} = 17 \;\ldots\ldots (2)\end{array}\right.$$

لاحظ ما يلي :

ـ إذا ضربنا طرفي المعادلة (1) في العدد 2 نحصل على معادلة مكافئة لها ونحصل على الجملة

$$\begin{cases} 2س + 2ع = 32 . \\ 5س - 2ع = 17 . \end{cases}$$

حيث جعلنا معاملي ع في المعادلتين متعاكسين .

أي
$$\begin{cases} س + ع = 16 \quad \dots\dots \quad \boxed{\times 2} \\ 5س - 2ع = 17 \quad \dots\dots \quad \boxed{\times 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2س + 2ع = 32 \\ 5س - 2ع = 17 \end{cases}$$

وبالجمع نجد :

$$(2س + 2ع) + (5س - 2ع) = 32 + 17 .$$

$$2س + 2ع + 5س - 2ع = 49 .$$

$$(2س + 5س) + (2ع - 2ع) = 49 .$$

$$7س = 49 \quad \text{ومنه} \quad س = \frac{49}{7} .$$

أي س = 7

نتبع نفس الطريقة لإيجاد قيمة ع .

$$\begin{cases} س + ع = 16 \quad \dots\dots \quad \boxed{\times (-5)} \\ 5س - 2ع = 17 \quad \dots\dots \quad \boxed{\times 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5س - 5ع = -80 \\ 5س - 2ع = 17 \end{cases}$$

وبالجمع نجد :

$$(-5س - 5ع) + (5س - 2ع) = (-80) + 17 .$$

$$-5س - 5ع + 5س - 2ع = -63$$

$(-5\text{س}+5\text{س})+(-5\text{ع}-2\text{ع})=-63$.

$-7\text{ع}=-63$ ومنه $\text{ع}=\dfrac{-63}{-7}$

أي $\boxed{\text{ع}=9}$

يمكننا أن نتحقق أن (7 ، 9) هي حل للجملة السابقة .

نستنتج أن : $\text{مج}=\{(7\ ،\ 9)\}$.

3) طريقة الحل بالجمع والتعويض

مثال :

لنحلّ في ح × ح الجملة :

$$\begin{cases} 3\text{س}-5\text{ع}=6 \quad \ldots\ldots(1) \\ 2\text{س}+4\text{ع}=-3 \quad \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\text{س}-5\text{ع}=6 \longrightarrow \boxed{\times 2} \\ 2\text{س}+4\text{ع}=-3 \longrightarrow \boxed{\times(-3)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6\text{س}-10\text{ع}=12 \\ -6\text{س}-12\text{ع}=9 \end{cases}$$

بالجمع نحصل على المعادلة $-10\text{ع}-12\text{ع}=12+9$

$-22\text{ع}=21$

$$\boxed{\text{ع}=-\frac{21}{22}}$$

لنعوّض بالعدد $-\dfrac{21}{22}$ في إحدى المعادلتين مثلا في الثانية

$2\text{س}+4\text{ع}=-3$

$2\text{س}+4\times\left(-\dfrac{21}{22}\right)=-3$

$$2\text{س} = -3 - 4 \times \left(-\frac{21}{22}\right)$$

$$2\text{س} = -3 + \frac{42}{11}$$

$$2\text{س} = \frac{-33 + 42}{11}$$

$2\text{س} = \frac{9}{11}$ ومنه $\boxed{\text{س} = \frac{9}{22}}$

لنتحقّق أن الثنائية $\left(\frac{9}{22} \text{ ، } -\frac{21}{22}\right)$ هي حل للجملة المفروضة .

فمجموعة حلول هذه الجملة هي : مج $= \left\{ \left(\frac{9}{22} \text{ ، } -\frac{21}{22}\right) \right\}$

حل في ح × ح كلاً من الجمل الآتية :

$$\begin{cases} \frac{2\text{س} + 1}{4} - \frac{\text{ع} + 1}{3} = 3 \\ 2(\text{ع} + 2) = 3(2\text{س} + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\text{س} + \text{ع}}{3} - \frac{\text{س} - \text{ع}}{5} = 28 \\ \frac{\text{س} - \text{ع}}{2} + \frac{\text{س} + \text{ع}}{4} = 60 \end{cases}$$

4. حالات خاصة :

مثال 1 : لنحلّ في ح × ح الجملة الآتية :

$$\begin{cases} -4\text{س} + \dfrac{\text{ع}}{2} = -2 & \ldots\ldots\ (1) \\[2mm] -\dfrac{20}{3}\text{س} + \dfrac{5\text{ع}}{6} = -\dfrac{10}{3} & \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

بعد توحيد المقامات نحصل على الجملة الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{-8\text{س} + \text{ع}}{2} = \dfrac{-4}{2} \\[2mm] \dfrac{-40\text{س} + 5\text{ع}}{6} = -\dfrac{20}{6} . \end{cases}$$

ومنها نحصل على الجملة :

$$\begin{cases} -8\text{س} + \text{ع} = -4 & \ldots\ldots\ (1)' \\ -40\text{س} + 5\text{ع} = -20 & \ldots\ldots\ (2)' \end{cases}$$

لاحظ أنه إذا ضربنا طرفي المعادلة (1)′ في 5 نحصل على المعادلة المكافئة (2)′ ، أو إذا قسمنا طرفي المعادلة (2)′ على 5 ، نحصل على المعادلة المكافئة (1)′

فيكون لدينا مثلا :

$$\begin{cases} -8\text{س} + \text{ع} = -4 \\ -8\text{س} + \text{ع} = -4 \end{cases}$$

إنّ مجموعة حلول الجملة المفروضة هي مجموعة حلول المعادلة :

$$-8\text{س} + \text{ع} = -4$$

ونعلم أن مجموعة حلول هذه المعادلة هي مجموعة غير منتهية من الثنائيات المرتّبة من ح × ح . نستنتج أن للجملة المفروضة عددًا غير منتهٍ من الحلول .

مثال 2 :

لنحلّ في ح × ح الجملة الآتية :

$$\begin{cases} 3\text{س} - 5\text{ع} = \frac{1}{5} \\ -2\text{س} + \frac{20}{6}\text{ع} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

بعد التحويلات نجد الجملة (أ) ثم الجملة (ب)

$$(\text{أ})\begin{cases} 15\text{س} - 25\text{ع} = 1 & \times 8 \\ -24\text{س} + 40\text{ع} = 21 & \times 5 \end{cases} \quad (\text{ب})\begin{cases} 120\text{س} - 200\text{ع} = 8 \\ -120\text{س} + 200\text{ع} = 105 \end{cases}$$

وبالجمع نجد المعادلة :

$$0 \,.\, \text{س} + 0 \,.\, \text{ع} = 113$$

من أجل أي ثنائية مرتبة من ح × ح يكون الطرف الأول لهذه المعادلة معدومًا وطرفها الثاني هو 113 .

وهذا مستحيل .

نقول إنه لا توجد أي ثنائية مرتبة من ح × ح تحقّق الجملة المفروضة ، أي أن مجموعة حلول هذه الجملة هي المجموعة الخالية .

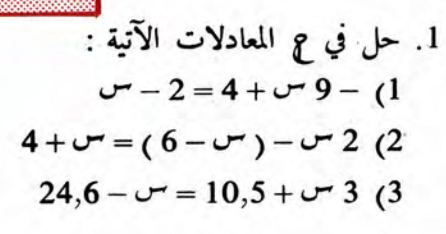
بصفة عامة :

كل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين :

- إما لها حل واحد فقط .
- وإما لها عدد غير منته من الحلول .
- وإما ليس لها حل .

تمارين

1. حل في ح المعادلات الآتية :



1) $-9\text{س} + 4 = 2 - \text{س}$

2) $2\text{س} - (\text{س} - 6) = \text{س} + 4$

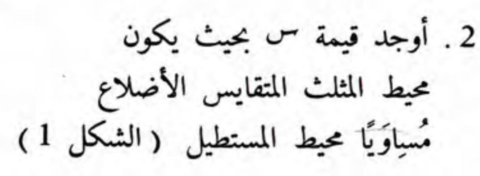
3) $3\text{س} + 10,5 = \text{س} - 24,6$

4) $\dfrac{3 + \text{س}}{4} = 0,2\text{س} + 0,8$.

5) $\sqrt{8} - (\text{س} + \sqrt{8}) = 3(\sqrt{8} - \text{س})$.

6) $\text{س} - (1 - \text{س})\sqrt{3} = -3$.

2. أوجد قيمة س بحيث يكون
محيط المثلث المتقايس الأضلاع
مُساوِيًا محيط المستطيل (الشكل 1)



الشكل 1

3. حل في ح المعادلات الآتية :

1) $\dfrac{\text{س} - 2}{3} - \dfrac{12 - \text{س}}{2} = \dfrac{5\text{س} - 36}{4} - 1$

2) $\dfrac{2\text{س} + 1}{3} - \dfrac{5 - 5\text{س}}{6} + \dfrac{4}{5} = 0$

3) $\dfrac{7\text{س}}{5} + 2\text{س} = 7 - \dfrac{3\text{س} - 11}{11}$.

4. حل في ح المعادلات الآتية :

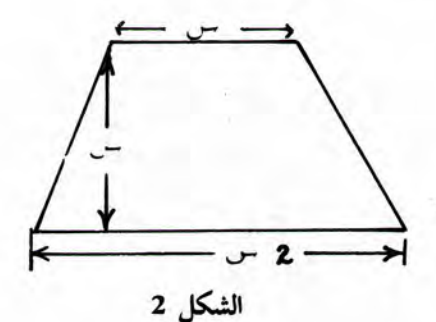
1) $(2\text{س} - 1)(\text{س} - 7) = 0$.

2) $4\text{س}^2 + 12\text{س} + 9 = 0$.

3) $9\text{س}^2 - 1 = 0$.

4) $25\text{س}^2 - 20\text{س} + 4 = 0$.

5. أوجد س بحيث يكون مساحة شبه المنحرف مساوية 24 سم^2 (الشكل 2) .



الشكل 2

6. حل في ح المعادلات الآتية :

1) $-7\text{س} + 4\text{س}^2 = 0$.

2) $\text{س}^2 - 16 = (3\text{س} - 1)(\text{س} - 4)$.

3) $2\text{س} - \frac{1}{10} \times 3\text{س} + \frac{7}{10} - 2\text{س} - \frac{1}{10} \times 5\text{س} - \frac{3}{10} = 0$.

4) $(\text{س} - 5)(\text{س} - 1) + (\text{س} - 5)(2\text{س} + 7) = (\text{س} - 5)(2\text{س} + 1)$.

7. أوجد س بحيث يكون
حجم متوازي المستطيلات
مساويا 135 م^3 . (الشكل 3)

الشكل 3

8. ا ، ب ، س أعداد حقيقية بحيث :

$\text{ا} = (\text{س} + 3)^2 + 3\text{س} + 9$.

$\text{ب} = (2\text{س} + 4) - (\text{س} + 1)$.

1) حلّل ا إلى جُداء عاملين .

2) حل في ح كلاً من المعادلتين ا = ب ؛ 3 ا = ب .

9. حل في ح كلاً من المعادلات الآتية :

1) $\text{س}^2 + 14\text{س} + 49 = 18\text{س}^2 - 12\text{س} + 2$.

2) $(\text{س} - 7)^2 - 9(2\text{س} - 5)^2 = 0$.

3) $\left(4\text{س} - \frac{1}{5}\right)^2 = \left(3\text{س} + \frac{1}{3}\right)^2$.

4) $\text{س}^2 - \text{س} + \frac{1}{4} = \frac{\text{س}^2}{4} - \frac{1}{3}\text{س} + \frac{1}{9}$.

10. أوجد ثلاثة أعداد طبيعية متتالية مجموعها 45 .

11. ثلاثة أعداد زوجية متتالية يزيد مجموع الثاني والثالث عن الأول بـ 58 . عيّن كلاً من هذه الأعداد .

12. عدد مكوّن من رقمين مجموعهما 11 ؛ إذا بدلنا موضعي الرقمين حصلنا على عدد يزيد عن العدد الأول بـ 63 .
ـ أوجد العدد الأول .

13. عدد مؤلف من رقمين ، رقم عشراته ضعف رقم آحاده ؛ إذا بدلنا موضعي الرقمين كان الفرق بين العدد الأول والعدد الناتج 27 . أوجد هذا العدد .

14. خزان من البترول مملوء بنسبة $\frac{4}{5}$ سعته ؛ استهلك منه 1400 م^3 ، فبقي فيه $\frac{1}{3}$ سعته .
ـ أوجد سعة هذا الخزان .

15. في سنة 1986 كان عمر أب 47 سنة وعمر ابنه 16 سنة
ـ في أي سنة يكون عمر الأب ضعف عمر الإبن .

16. مربعان طول ضلع أحدهما 5 أمثال طول ضلع الآخر ؛ ومجموع مساحتيهما 2106 م^2 .
ـ أوجد طول ضلع كل من المربعين .

17. عمر رجل 40 سنة وعمر ابنه 9 سنوات . بعد كم سنة يصبح عمر الأب ضعف عمر الابن ؟

18. مجموع أعمار ابن وأمه وجدته هو 90 سنة .
ـ أوجد عمر كل منهم علمًا بأن عمر الجدة ضعف عمر الأم ، وعمر الإبن ثلث عمر أمه .

19. حل في ح × ح الجمل الآتية :

أ) $\begin{cases} 2\text{س} + 5\text{ع} = 7 \\ \text{س} - \text{ع} = -4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \text{س}\sqrt{2} + \text{ع} = 0 \\ \text{س} + 3\text{ع} = -1 \end{cases}$.

20. أ) $\begin{cases} \frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{ع}}{3} = 4 \\ \frac{\text{س}}{4} - \frac{\text{ع}}{2} = -2 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{11}{7}\text{س} + 2\text{ع} = 22 \\ \frac{3}{8}\text{س} - 4\text{ع} = \frac{21}{4}. \end{cases}$

21. أ) $\begin{cases} 4(\text{س} - 2\text{ع}) + 3(\text{س} + \text{ع}) = 16 \\ 4(\text{س} + 2\text{ع}) - 3(\text{س} - \text{ع}) = 14 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{\text{س} - 1}{4} - \frac{\text{س} - 3}{2} = \frac{\text{ع} - 2}{3}. \\ \frac{3\text{س} + 1}{8} + \frac{2\text{س} + 6}{5} = \frac{7\text{ع}}{5}. \end{cases}$

22. أ) $\begin{cases} \text{س}\sqrt{3} - \text{ع}\sqrt{2} = \sqrt{5} \\ -\text{س}\sqrt{6} + 2\text{ع} = \sqrt{10} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{2}{3}(\text{س} + \text{ع}) + \frac{3}{4}(\text{س} - \text{ع}) = 1 \\ \frac{4}{3}(\text{س} + \text{ع}) + \frac{2}{3}(\text{س} - \text{ع}) = 1 \end{cases}$

23. أ) $\begin{cases} \frac{\text{س} - \text{ع}}{2} - \frac{2\text{س} + 1}{3} = 0 \\ \frac{4\text{س} - 1}{3} + \frac{2\text{ع} - 3}{2} = 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{5\text{س}}{3} + \frac{3\text{ع}}{5} = 15 - 2\left(\frac{5\text{س}}{3} + \frac{6\text{ع}}{5}\right) \\ \frac{2\text{س}}{3} + \text{ع} = 31 - 8\left(\frac{\text{س}}{6} + \text{ع}\right) \end{cases}$

24. أ) $\begin{cases} \frac{س}{3} + \frac{ع}{3} = 2 \\ 0,4\, س + 0,6\, ع = 2,6 \end{cases}$.

ب) $\begin{cases} 0,3\, س - 1,4\, ع = -0,8 \\ 0,7\, س + 1,3\, ع = 37 \end{cases}$

25. إذا كان ثمن كتابين أحدهما للجغرافيا والثاني للتاريخ 24 د.ج وكان ثمن كتابين للجغرافيا يزيد 9 د.ج عن ثمن كتاب التاريخ .
ـ فما ثمن كل من الكتابين ؟

26. س و ع عددان ، مجموع الأول وثلاثة أمثال الثاني يساوي 53 والفرق بين أربعة أمثال الأول وضعف الثاني يساوي 2 . فما هما العددان ؟

27. أ ، ب متحركان . إذا كانت سرعة أ تزيد عن سرعة ب 2 كيلو متر في الساعة وكانت ثلاثة أمثال سرعة أ تزيد 3 كيلو مترات في الساعة عن ضعف سرعة ب . فما سرعة كل منهما ؟

28. اشترى تلميذ من أحد المكتبات مسطرة وكراساً وعند عودته إلى المنزل سأله أخوه عن ثمن كل منهما ، فقال التلميذ لأخيه : إن ثمن 9 كراسات يساوي ثمن 6 مساطر وإن مجموع ثمن 5 كراسات و 4 مساطر هو 22 د.ج .
فهل يمكنك معرفة ثمن كل من الكراس والمسطرة ؟

29. كُلِّف مقاول بإنجاز مشروع خلال أسبوع فوجد أنه لو استخدم 40 عاملاً مختصًا و 22 عاملاً مساعدًا لبلغ أجرهم الأسبوعي 6780 د.ج ؛ ولو استخدم 32 عاملاً مختصًا و 25 عاملاً مساعدًا لوفَّر 690 د.ج .
فما أجرة كل من العامل المختص والعامل المساعد ؟

المعادلات عند الخوارزمي

رياضي من القرن الثالث الهجري (توفي 850 للميلاد) .

محمد بن موسى الخوارزمي من بلدة خوارزم ، كانت له مكانة عند الخليفة المأمون وولاه بيت الحكمة وجعله رئيس بعثة إلى بلاد الأفغان للبحث والتنقيب ، كان نابغة في الرياضيات والفلك .

هو أول من أطلق اسم الجبر على العلم المعروف الآن بهذا الإسم ، وأول من حرر الجبر عن الحساب وألّف فيه كتاب « الجبر والمقابلة » . ومعني الجبر تعويض الطرح بعملية جمع ، والمقابلة تعني مقابلة المجهول بقيمة معلومة .

وقد صنف الخوارزمي الأعداد المستعملة في الجبر إلى ثلاثة أنواع : « الجذر » مثل س ، و « المال » مثل $س^2$ ، والأعداد المفردة مثل 1 ، 2 ، 3 ، ا ، ب ، ... .

كما صنف مسائل الحياة اليومية من معاملات تجارية وقسمة التركات ومسح الأراضي إلى ستة أنواع حيث صاغ كل نوع بمعادلة ، وهذه المعادلات هي :

1) « أموال تعدل جذورًا » مثل المعادلة : $ا س^2 = ب س$.

2) « أموال تعدل أعدادًا » مثل المعادلة : $ا س^2 = جـ$.

3) « جذور تعدل أعدادًا » مثل المعادلة : $ب س = جـ$.

4) « أموال وجذور تعدل أعدادًا » مثل المعادلة : $ا س^2 + ب س = جـ$.

5) « مال وأعداد تعدل جذورًا » مثل المعادلة : $س^2 + جـ = ب س$.

6) « جذور وأعداد تعدل أموالاً » مثل المعادلة : $ب س + جـ = ا س^2$.

استعمل الخوارزمي الحصر الآتي : $\frac{62832}{2 \times 10^4} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$

8 معادلات مستقيم في المستوي

1. تعين مستقيم في المستوي :

(ﻫ) ب ا

الشكل 1

1) ا ، ب نقطتان من المستوي .

نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (ﻫ) يشمل هاتين النقطتين ، هذا يعني أن النقطتين ا ، ب تعيّنان المستقيم (ﻫ) أي (ا ب) .

يتعين مستقيم في المستوي بنقطتين مختلفتين من هذا المستوى

2) $\overleftarrow{ش}$ شعاع غير معدوم في المستوي ؛ ا نقطة من هذا المستوي .

(ك) مستقيم من المستوي شعاع توجيهه $\overleftarrow{ش}$ ولا يشمل ا

نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (ﻫ) يشمل ا ويوازي (ك) ، فالمستقيم (ﻫ) معين بالنقطة ا و الشعاع $\overleftarrow{ش}$.

• نعلم أنه إذا كانت النقط ا ، ب ، ج على استقامة واحدة ، أي إذا كانت ج نقطة من المستقيم المعيّن بالنقطتين ا ، ب فإن الشعاع $\overleftarrow{اج}$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{اب}$ ، أي $\overleftarrow{اج} // \overleftarrow{اب}$.

• ونعلم أنه إذا كانت ا ، ب ، ج ثلاث نقط من المستوي بحيث : $\overleftarrow{اج} // \overleftarrow{اب}$ فإن هذه النقط تنتمي إلى المستقيم (ا ب) .

نتيجة 1 :

المستقيم (ق) المعيّن بالنقطتين ا ، ب هو مجموعة النقط د من المستوي بحيث $\overleftarrow{اد} // \overleftarrow{اب}$.

• إذا كانت د نقطة من المستقيم (ق) المعيّن بالنقطة ا وشعاع التوجيه $\overleftarrow{ش}$ فإن $\overleftarrow{اد} // \overleftarrow{ش}$.

• وإذا كان $\overleftarrow{ش}$ شعاعًا في المستوي و ا ، د نقطتين من المستوي بحيث $\overleftarrow{اد} // \overleftarrow{ش}$ فإن النقطة د تنتمي إلى المستقيم المعيّن بالنقطة ا وشعاع التوجيه $\overleftarrow{ش}$.

نتيجة 2 :

المستقيم (ق) المعيّن بالنقطة ا وشعاع توجيه $\overleftarrow{ش}$ هو مجموعة النقط د من المستوي بحيث $\overleftarrow{اد} // \overleftarrow{ش}$.

2. معادلات مستقيم في المستوي :

مثال 1 :

• **إيجاد معادلة لمستقيم معيّن بنقطتين :**

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي ، ا (− 2 ، − 3) ، ب (3 ، 4) نقطتان من المستوي ، (ق) هو المستقيم المعيّن بالنقطتين ا ، ب .

(ق) هو مجموعة النقط د (س ، ع) من المستوي بحيث $\overleftarrow{اد} // \overleftarrow{اب}$.

لدينا $\overleftarrow{اد} \begin{pmatrix} س + 2 \\ ع + 3 \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{اب} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$\overleftarrow{اد} // \overleftarrow{اب}$ معناه $7 (س + 2) - 5 (ع + 3) = 0$

أي $7 س + 14 - 5 ع - 15 = 0$

ومنه $7 س - 5 ع - 1 = 0$ .... (1)

لاحظ أننا حصلنا على معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع وأن إحداثيي النقطة ا يحققان المعادلة (1)

أي أن $7 \times (-2) - 5(-3) - 1 = -14 + 15 - 1 = 0$.

وأيضا إحداثيا النقطة ب يحققان هذه المعادلة .

أي أن $(7 \times 3) - (5 \times 4) - 1 = 21 - 20 - 1 = 0$

إليك النقط حـ $(1 ، 0)$ ، ء $(8 ، 11)$ ، هـ $(-12 ، -17)$ ، ك $\left(\frac{1}{3} ، \frac{2}{5}\right)$.

• يمكن أن تتحقّق أن النقطتين ء ، هـ تنتميان إلى (ق) لأن $\overleftrightarrow{اء}$ // $\overleftrightarrow{اب}$ و $\overleftrightarrow{اهـ}$ // $\overleftrightarrow{اب}$ ، بينما النقطتان حـ ، ك لا تنتميان إلى (ق) ، لأن $\overleftrightarrow{احـ}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{اب}$ وأيضًا $\overleftrightarrow{اك}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{اب}$.

• لاحظ أن إحداثيي كل من النقطتين ء ، هـ يحقّقان المعادلة (1) ، لكن إحداثيي كل من النقطتين حـ ، ك لا يحقّقان المعادلة (1) .

وبصفة عامة :

إحداثيا كل نقطة من المستقيم (ق) يحقّقان المعادلة (1) .
وإحداثيا كل نقطة لا تنتمي إلى (ق) لا يحققان المعادلة (1) .
المعادلة (1) تسمى **معادلة للمستقيم** (ق) .

> المستقيم (ق) المعيّن بالنقطتين ا $(-2 ، -3)$ ، ب $(3 ، 4)$ هو مجموعة النقط م (س ، ع) من المستوي بحيث : $7س - 5ع - 1 = 0$

> ا $(2 ، 1)$ ، ب $(5 ، 4)$ نقطتان من المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) . عيّن معادلة للمستقيم (ق) .

مثال 2 :

• إيجاد معادلة للمستقيم المعيّن بنقطة وشعاع توجيه :

(ق) مستقيم في المستوي المزود بالمعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) ، هـ (2 ، 5) نقطة من (ق) ، $\vec{ش}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (ق) .

لنبحث عن معادلة للمستقيم (ق) المعيّن بالنقطة هـ وشعاع التوجيه $\vec{ش}$

ـ نعلم أن المستقيم (ق) المعيّن بالنقطة هـ وشعاع التوجيه $\vec{ش}$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي بحيث $\vec{هـن} // \vec{ش}$.

لكن $\vec{هـن}\begin{pmatrix}س - 2\\ع - 5\end{pmatrix}$ و $\vec{ش}\begin{pmatrix}- 3\\4\end{pmatrix}$.

إذن $\vec{هـن} // \vec{ش}$ معناه 4 (س − 2) − [− 3 (ع − 5)] = 0

أي 4 س − 8 + 3 ع − 15 = 0 .

فتكون **4 س + 3 ع − 23 = 0** هي معادلة للمستقيم (ق) .

> المستقيم المعيّن بالنقطة هـ (2 ، 5) وشعاع التوجيه $\vec{ش}\begin{pmatrix}- 3\\4\end{pmatrix}$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي بحيث 4 س + 3 ع − 23 = 0

(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

أوجد معادلة للمستقيم المعيّن بالنقطة أ (5 ، 1) وشعاع التوجيه $\vec{ش}\begin{pmatrix}- 1\\2\end{pmatrix}$

بصفة عامة :

لنبرهن أن لكل مستقيم في المستوي المزوّد بمعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ معادلة من الشكل $ا س + ب ع + ح = 0$ حيث $ا$ ، $ب$ ، $ح$ أعداد حقيقية و $ا$ ، $ب$ غير معدومين معًا

البرهان :

(ق) مستقيم معيّن مثلا بنقطة $هـ(س_0 ، ع_0)$ وبشعاع توجيه $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

نعلم أن (ق) هو مجموعة النقط $ن(س ، ع)$ من المستوي بحيث : $\overleftarrow{هـن} // \overleftarrow{ش}$.

لدينا $\overleftarrow{هـن}\begin{pmatrix}س - س_0 \\ ع - ع_0\end{pmatrix}$.

$\overleftarrow{هـن} // \overleftarrow{ش}$ معناه $\beta(س - س_0) - \alpha(ع - ع_0) = 0$

أي $\beta س - \beta س_0 - \alpha ع + \alpha ع_0 = 0$

أو $\beta س - \alpha ع - \beta س_0 + \alpha ع_0 = 0$.

$\beta س + (-\alpha) ع + (-\beta س_0 + \alpha ع_0) = 0$.

نضع $\beta = ا$ ، $-\alpha = ب$ ، $-\beta س_0 + \alpha ع_0 = ح$.

فتصبح مركبتا شعاع التوجيه $\overleftarrow{ش}$ هما $-ب$ ، $ا$ أي $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-ب \\ ا\end{pmatrix}$.

ويكون $ا س + ب ع + ح = 0$

• في هذه المعادلة العددان $ا$ ، $ب$ غير معدومين معًا ، لأن الشعاع $\overleftarrow{ش}$ الذي هو شعاع توجيه للمستقيم (ق) غير معدوم ، أي مركبتاه غير معدومتين معًا .

• إنّ المعادلة $ا س + ب ع + ح = 0$ حيث $ا$ ، $ب$ غير معدومين معًا تسمى معادلة للمستقيم (ق) المعيّن بالنقطة $هـ(س_0 ، ع_0)$ وشعاع التوجيه $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-ب \\ ا\end{pmatrix}$.

يقبل كل مستقيم من المستوي المزود بمعلم معادلة من الشكل :
ا س + ب ع + حـ = 0 حيث ا ، ب غير معدومين معا .

نقبل ما يلي :

($م$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي .
كل معادلة من الشكل ا س + ب ع + حـ = 0 حيث ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية و ا ، ب غير معدومين معًا هي معادلة لمستقيم في المستوى يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} -ب \\ ا \end{pmatrix}$.

مثال : المعادلة 2 س − 3 ع + 5 = 0 هي معادلة للمستقيم الذي يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

حالات خاصة :

1) إذا كان ا = 0 فإن المعادلة ا س + ب ع + حـ = 0 تصبح :
ب ع + حـ = 0 ومنه ع = $-\frac{حـ}{ب}$ وهي معادلة لمستقيم يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} -ب \\ 0 \end{pmatrix}$ وهذا الشعاع يوازي شعاع الوحدة $\overleftarrow{و}$ ، وبالتالي فهو يوازي محور الفواصل .

مثال : المعادلة 3 ع − 7 = 0 هي معادلة لمستقيم يوازي محور الفواصل ويشمل مثلا النقط $\left(0 ، \frac{7}{3}\right)$ ، $\left(-1 ، \frac{7}{3}\right)$ ، $\left(5 ، \frac{7}{3}\right)$.

2) إذا كان $ب = 0$ فإن المعادلة $أس + ب ع + حـ = 0$ تصبح :

$أس + حـ = 0$ ومنه $س = -\frac{حـ}{أ}$ وهي معادلة لمستقيم يوازي

الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}0\\أ\end{pmatrix}$ أي يوازي شعاع الوحدة $\overleftarrow{ى}$ وبالتالي يوازي محور

التراتيب .

مثال : المعادلة $2 س + 6 = 0$ هي معادلة لمستقيم يوازي محور التراتيب ويشمل مثلاً النقط $(-3 ، 0)$ ، $(-3 ، 1)$ ، $(-3 ، -2)$.

ملاحظة :

- معادلة محور الفواصل هي $ع = 0$.
- معادلة محور التراتيب هي $س = 0$.

3) إذا كان $أ \neq 0$ ، $ب \neq 0$ ، $حـ = 0$ فإننا نحصل على المعادلة :

$أس + ب ع = 0$

ويمكن أن نكتب هذه المعادلة على الشكل :

$ع = -\frac{أ}{ب} س$.

لاحظ أن إحداثيي المبدأ يحققان هذه المعادلة ،

أي $أ \times 0 + ب \times 0 = 0$

فهذه المعادلة هي معادلة للمستقيم الذي يشمل المبدأ ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-ب\\أ\end{pmatrix}$.

ملاحظة 1 :

إذا ضربنا طرفي المعادلة ا س + ب ع + حـ = 0 بأي عدد حقيقي غير معدوم ك نحصل على المعادلة المكافئة لها وهي :

(ك ا) س + (ك ب) ع + ك حـ = 0

هذه المعادلة هي أيضا معادلة لنفس المستقيم.

مثال :

رأيت أن المعادلة 7 س − 5 ع − 1 = 0 هي معادلة للمستقيم (ق) المعيّن بالنقطتين ا (− 2 ، − 3) ، ب (3 ، 4).

كل من المعادلات الآتية هي أيضا معادلة للمستقيم (ق).

14 س − 10 ع − 2 = 0 .

− $\frac{7}{5}$ س + ع + $\frac{1}{5}$ = 0 .

− 2 س − $\frac{10}{7}$ ع − $\frac{2}{7}$ = 0 .

ملاحظة 2 :

إذا كانت ا س + ب ع + حـ = 0 معادلة للمستقيم (ق) ، وإذا كان مثلا ب ≠ 0 فإن : $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ س + ع + $\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$ = 0

أو ع = − $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ س − $\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$

وهي أيضا معادلة للمستقيم (ق) الذي شعاع توجيهه $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \end{pmatrix}$

لاحظ أن الشعاعين $\begin{pmatrix} 1- \\ \frac{أ}{ب} \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{أ}{ب} \end{pmatrix}$ متوازيان ، إذن الشعاع $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{أ}{ب} \end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (ق) .

- العدد $-\frac{أ}{ب}$ يسمى **معامل التوجيه للمستقيم** (ق) .

- إذا كان المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) متعامدًا ومتجانسًا نسمي هذا المعامل **ميل المستقيم** (ق) .

3. إنشاء مستقيم معرف بمعادلة :

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوى .

مثال 1 : لننشيء المستقيم (ق) المعرف بالمعادلة

3 س $- 2$ ع $+ 1 = 0$ ......(1)

ـ نعلم أنه لإنشاء مستقيم في المستوي يكفي معرفة نقطتين منه أو معرفة نقطة منه وشعاعِ توجيه له .

ـ وبما أن المستقيم (ق) معرف بالمعادلة (1) التي هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين،يوجد عدد غير منته من الثنائيات المرتبة التي تحققها .

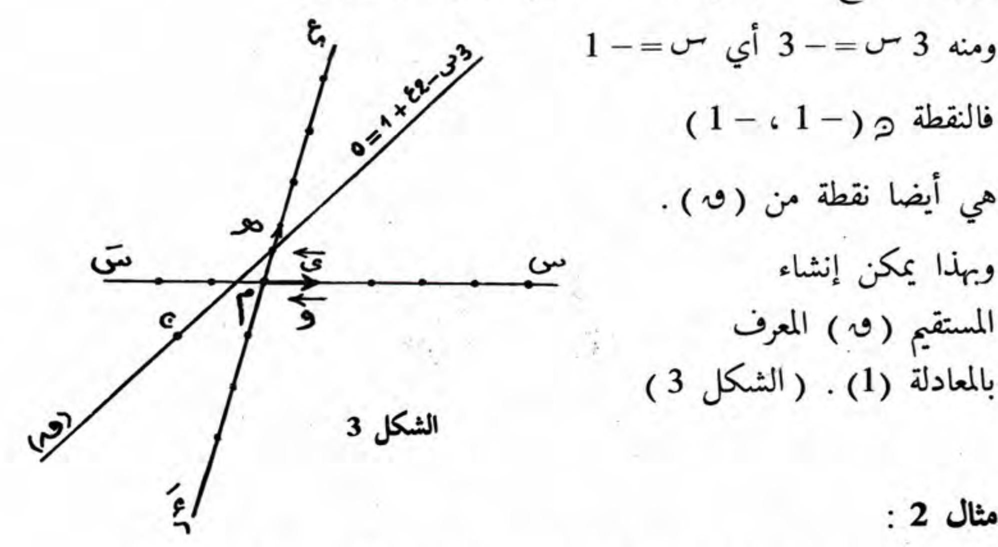
ولتعيين ثنائية مرتبة تحقق المعادلة (1) يكفي إعطاء قيمة لأحد المجهولين فنجد قيمة المجهول الآخر .

- مثلاً إذا كان س $= 0$ فإن $3 \times 0 - 2$ ع $+ 1 = 0$

ومنه 2 ع $= 1$ أي ع $= \frac{1}{2}$.

فالنقطة هـ $\left(0 ، \frac{1}{2}\right)$ هي نقطة من (ق) .

• إذا كان ع = − 1 فإن 3 س − 2 (− 1) + 1 = 0 .
ومنه 3 س = − 3 أي س = − 1
فالنقطة ج (− 1 ، − 1)
هي أيضا نقطة من (ف) .
وبهذا يمكن إنشاء المستقيم (ف) المعرف بالمعادلة (1) . (الشكل 3)



الشكل 3

مثال 2 :

لننشىء المستقيم (ل) المعرف بالمعادلة 4 س + 3 ع − 3 = 0 ....(1)
يمكن أن ننشىء (ل) بإيجاد نقطة منه وشعاع توجيه له .

من المعادلة (1) نجد أن الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (ل) ،
لإنشاء (ل) يكفي معرفة نقطة منه .
مثلاً النقطة ج (3 ، − 3) .

الشكل 4

مثال 3 :

لننشىء المستقيم (ك) المعرف بالمعادلة س + 2 = 0 ....(1)

لاحظ أن هذه المعادلة هي من الشكل س + 0 ع + 2 = 0

فالمستقيم (ك) يوازي الشعاع ش $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ الذي هو الشعاع ى. ويكفي لإنشاء (ك) أن نعرف نقطة منه مثلا النقطة هـ (− 2 ، 0) . (الشكل 5) .

الشكل 5

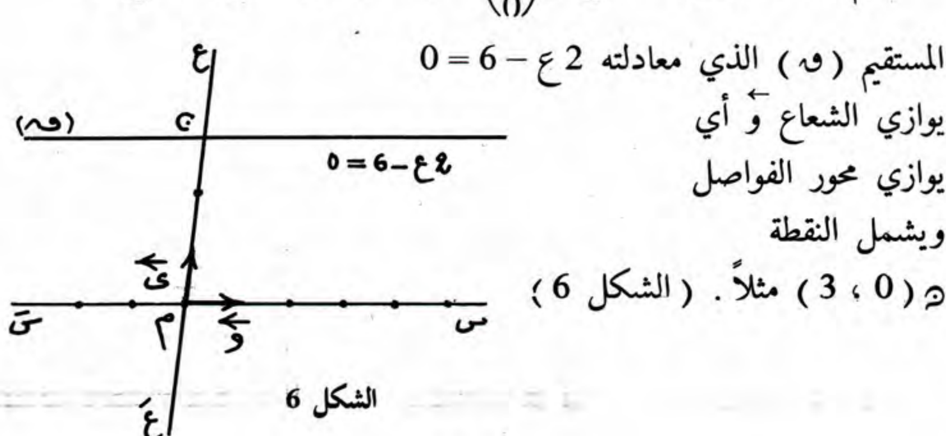
مثال 4 :

ـ لننشىء المستقيم (ه) المعرف بالمعادلة 2 ع − 6 = 0 ....(1)

لاحظ أن هذه المعادلة هي من الشكل 0 . س + 2 ع − 6 = 0

فالمستقيم (ه) يوازي الشعاع ش $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ الذي له نفس منحى الشعاع و .

المستقيم (ه) الذي معادلته 2 ع − 6 = 0 يوازي الشعاع و أي يوازي محور الفواصل ويشمل النقطة ج (0 ، 3) مثلاً . (الشكل 6)



الشكل 6

مثال 5 :

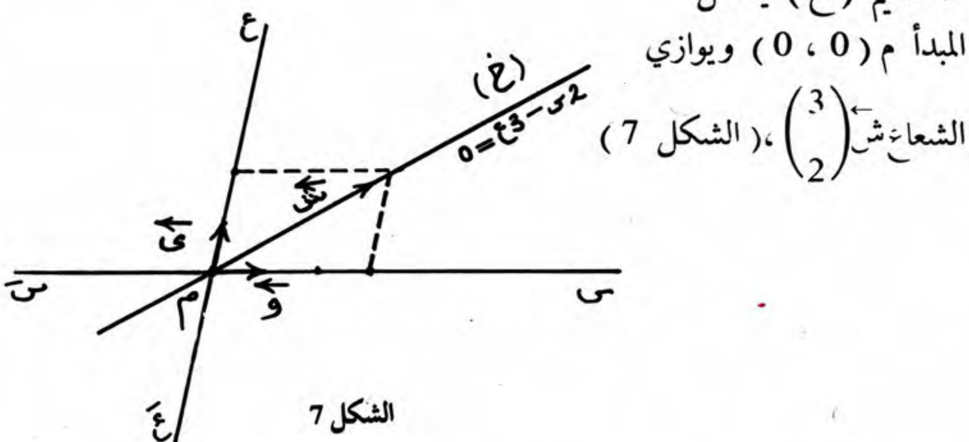
ـ لننشىء المستقيم (خ) المعرف بالمعادلة 2 س − 3 ع = 0 ....(1)

لاحظ أن المستقيم (خ) يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

ولإنشاء هذا المستقيم يكفي معرفة نقطة منه .

لاحظ أن النقطة م (0 ، 0) تحقق المعادلة (1) لأن 2 × 0 − 3 × 0 = 0

فالمستقيم (خ) يشمل المبدأ م (0 ، 0) ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ، (الشكل 7)



الشكل 7

أنشىء في المستوي المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)
المستقيمات المعرفة بالمعادلات الآتية :

$\frac{2}{3}$ س − $\frac{4}{5}$ ع = 2 ؛ − 6 س − $\frac{4}{7}$ ع − $\frac{8}{5}$ = 0 ؛

− $\frac{3}{4}$ س = $\frac{2}{5}$ ع ؛ س = − $\frac{5}{2}$ ؛ ع = 3 .

الحل البياني لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

$(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ معلم للمستوي .

$أس + ب ع + ح = 0$ .... (1) حيث $(أ ، ب) \neq (0 ، 0)$

$أ'س + ب'ع + ح' = 0$ .... (2) حيث $(أ' ، ب') \neq (0 ، 0)$.

نعلم أن حل هذه الجملة هو إيجاد مجموعة الثنائيات المرتبة (س ، ع) من ح × ح التي تحقّق المعادلتين معًا ، وهذا يعني إيجاد مجموعة النقط ن (س ، ع) التي تنتمي إلى المستقيم (ف) المعرّف بالمعادلة (1) وإلى المستقيم (ك) المعرّف بالمعادلة (2) أي إلى المجموعة $(ف) \cap (ك)$ ، ونعلم أن أي مستقيمين في المستوي هما :

(1) إما متقاطعان في نقطة ، وفي هذه الحالة للجملة **حل وحيد**

(2) وإما متوازيان تمامًا ، وفي هذه الحالة الجملة **ليس لها حل** .

(3) وإما متطابقان ، وفي هذه الحالة للجملة **عدد غير منته من الحلول** .

إيجاد مجموعة النقاط المشتركة للمستقيمين يسمى الحل البياني للجملة .

مثال 1 :

لنحل بيانيًا الجملة
$$\begin{cases} س + ع + 1 = 0 \;....\; (1) . \\ س - 2ع + 4 = 0 \;....\; (2) . \end{cases}$$

ـ لننشىء المستقيمين (ف) و (ك) المعرفين بالمعادلتين (1) و (2) على الترتيب بالنسبة إلى المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$.

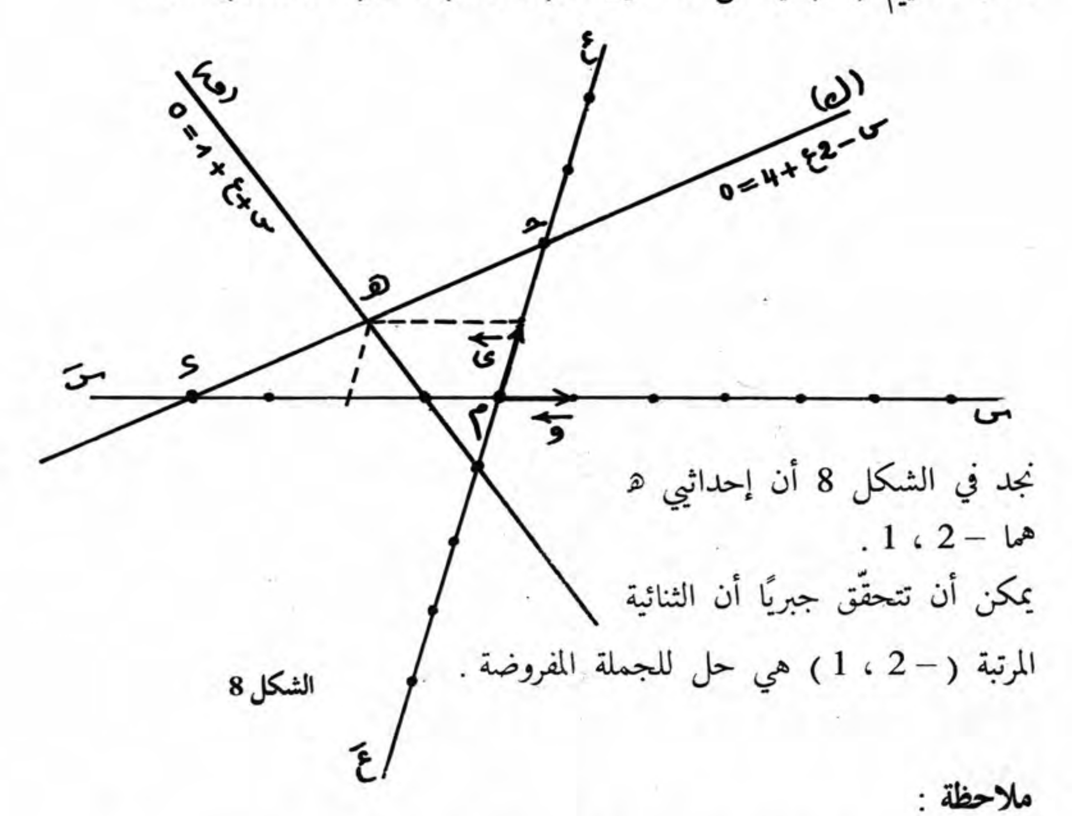
إن الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (ف) .

والشعاع $\overleftarrow{ش'}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (ك) .

الشعاعان $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ غير متوازيين لأن $(-1) \times 1 \neq 1 \times 2$.

فالمستقيمان متقاطعان في نقطة هـ $(س_0 ، ع_0)$ حيث $(س_0 ، ع_0)$ هو حل الجملة المفروضة .

ـ المستقيم (ه) يشمل النقطتين أ (0 ، – 1) ، ب (– 1 ، 0) مثلاً .
ـ والمستقيم (ك) يشمل النقطتين حـ (0 ، 2) ؛ ء (– 4 ، 0) مثلاً .



نجد في الشكل 8 أن إحداثيي ه هما – 2 ، 1 .
يمكن أن تتحقّق جبريًا أن الثنائية المرتبة (– 2 ، 1) هي حل للجملة المفروضة .

الشكل 8

ملاحظة :

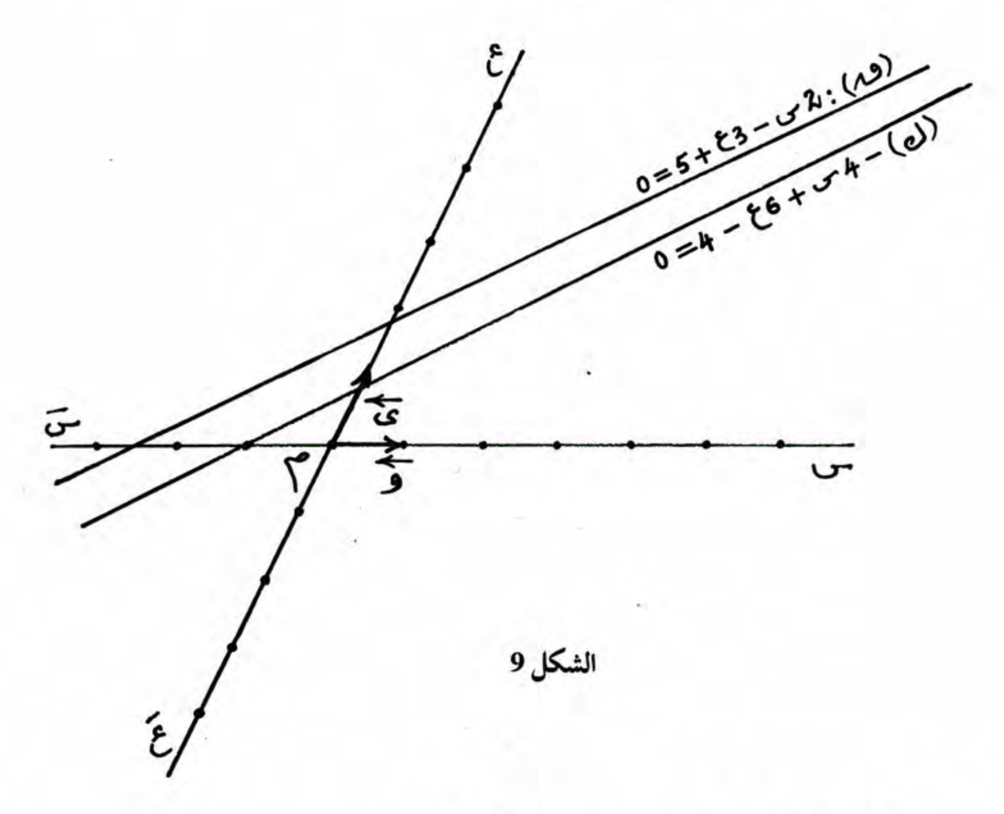
يفضل استعمال الورق الميليمتري لإيجاد الحل البياني لجملة بدقة أكثر ، ولإيجاد الحل الدقيق لجملة نستخدم إحدى الطرق الجبرية للحل .

مثال 2 :

إليك الجملة
2 س – 3 ع + 5 = 0 .... (1)
– 4 س + 6 ع – 4 = 0 .... (2)

لننشىء المستقيم (ه) المعرف بالمعادلة (1) والذي يشمل مثلاً النقطتين أ (– 2,5 ، 0) ، ب (5 ، 5) .

والمستقيم (ك) المعرف بالمعادلة (2) والذي يشمل مثلاً النقطتين
ح (− 1 ، 0) ، ى (2 ، 2) .



الشكل 9

ـ لاحظ أن المستقيمين متوازيان تمامًا .
فالجملة المفروضة ليس لها حل ، ويمكن أن نتحقّق من ذلك جبريًا .

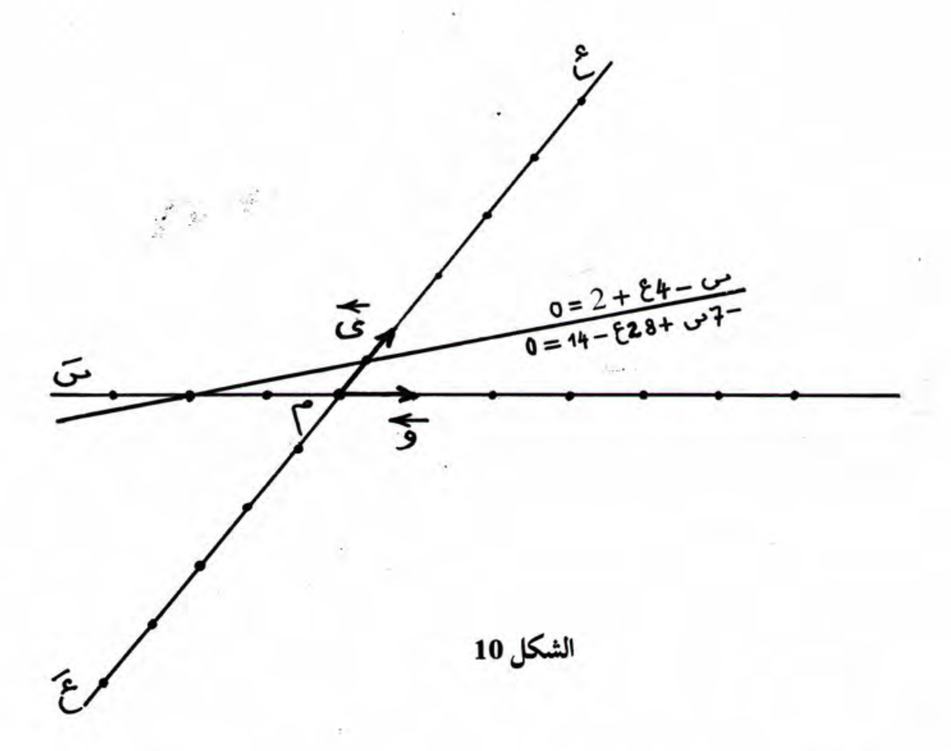
ـ لاحظ أيضا أن المستقيم (ه) يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. والمستقيم (ك)

يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش'}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$. و $\overleftarrow{ش} // \overleftarrow{ش'}$

لأن $3 \times (-4) = 2 \times (-6)$ وهذا يعني أن (ه) // (ك) .

مثال 3 :

إليك الجملة
س − 4 ع + 2 = 0 .... (1)
− 7 س + 28 ع − 14 = 0 ....(2)



الشكل 10

لاحظ أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان ، فهما تعيّنان نفس المستقيم ؛ الذي هو مجموعة النقط ن (س ، ع) حيث (س ، ع) هو حل للجملة المفروضة .

نستنتج أن لهذه الجملة عدد غير منته من الحلول .

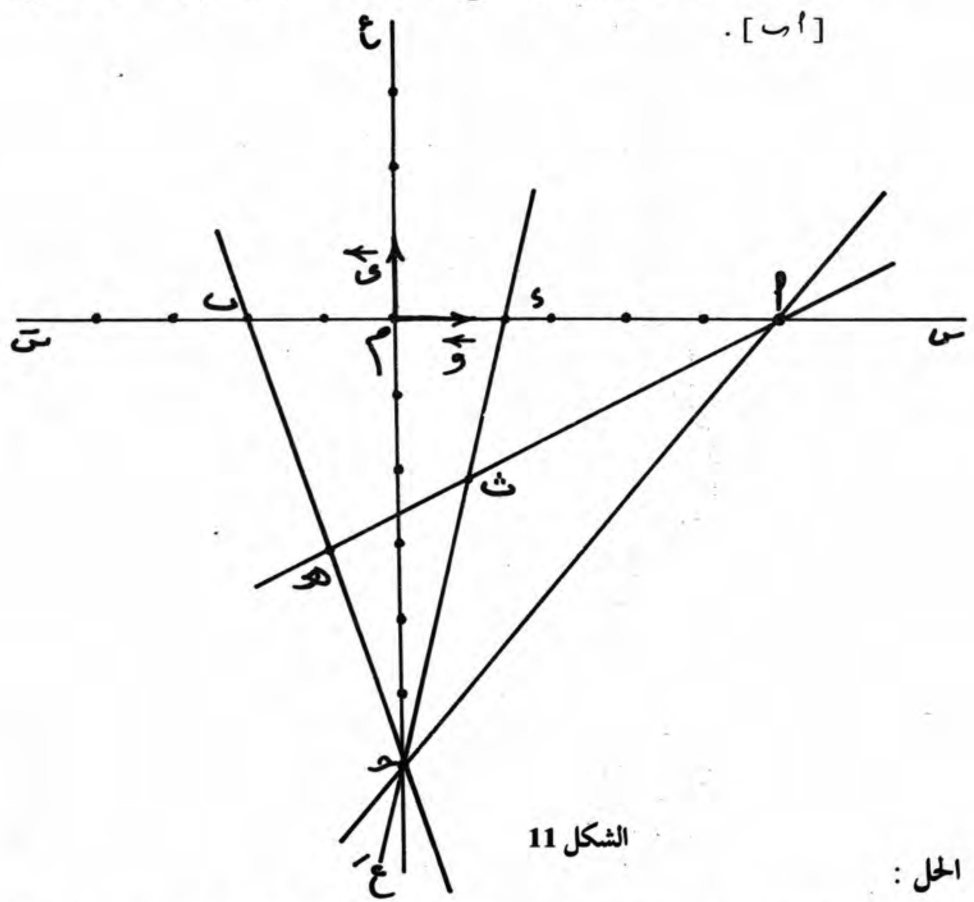
مسألة محلولة

$(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ معلم للمستوى .

النقط أ(5 ، 0) ، ب(− 2 ، 0) ، ح(0 ، − 6) هي رؤوس مثلث .

1) أوجد إحداثيي النقطة ث مركز ثقل المثلث أ ب ح .

2) أوجد معادلة حامل كل من الضلع (أ ب) والعمود (ح م) المتعلّق بالضلع [أ ب] .



الشكل 11

الحل :

نعلم أن النقطة ث هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ويكفي أن نعيّن ث بمتوسطين مثلاً بالمتوسطين (ح ء) ، (أ هـ) حيث ء منتصف [أ ب] ، هـ منتصف [ح ب] .

• **تعيين إحداثي ء :**

نعلم أن $\text{س}_{\text{ء}} = \frac{\text{س}_{\text{ا}} + \text{س}_{\text{ب}}}{2}$ ؛ $\text{ع}_{\text{ء}} = \frac{\text{ع}_{\text{ا}} + \text{ع}_{\text{ب}}}{2}$

$\text{س}_{\text{ء}} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$ ؛ $\text{ع}_{\text{ء}} = 0$ إذن ء $\left(\frac{3}{2} ، 0\right)$.

• **تعيين إحداثي ه :**

$\text{س}_{\text{ه}} = \frac{\text{س}_{\text{ب}} + \text{س}_{\text{ج}}}{2}$ ؛ $\text{ع}_{\text{ه}} = \frac{\text{ع}_{\text{ب}} + \text{ع}_{\text{ج}}}{2}$

$\text{س}_{\text{ه}} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$ ؛ $\text{ع} = \frac{0 - 6}{2} = -3$

إذن ه $(-1 ، -3)$.

• **معادلة (اه) :**

إذا فرضنا ث (س ، ع) نقطة من (اه) فيكون $\overleftarrow{\text{اث}} // \overleftarrow{\text{اه}}$

و $\overleftarrow{\text{اث}} \begin{pmatrix} \text{س} - 5 \\ \text{ع} - 0 \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{اه}} \begin{pmatrix} -1 - 5 \\ -3 - 0 \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{\text{اه}} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

فيكون : $-3(\text{س} - 5) - (-6) \times \text{ع} = 0$

أي $-3(\text{س} - 5) + 6\text{ع} = 0$

$-3(\text{س} - 5 - 2\text{ع}) = 0$

أو $\text{س} - 2\text{ع} - 5 = 0$ ......(1) .

• **معادلة (حء) :**

لدينا : $\overleftarrow{\text{حث}} // \overleftarrow{\text{حء}}$

لكن $\overleftarrow{\text{حث}} \begin{pmatrix} \text{س} - 0 \\ \text{ع} - (-6) \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{\text{حث}} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ع} + 6 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{حد}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ 0 - (-6) \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{\text{حد}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$.

فيكون 6 س − $\frac{3}{2}$ (ع + 6) = 0

أي 6 س − $\frac{3}{2}$ ع − 9 = 0

أو 12 س − 3 ع − 18 = 0 ...... (2)

ويكفي لإيجاد المجهولين س ، ع أن نحلّ الجملة :

س − 2 ع − 5 = 0 ...... (1)

12 س − 3 ع − 18 = 0 ...... (2)

من المعادلة (1) لدينا س = 2 ع + 5 .

وبالتعويض في (2) نجد :

12 (2 ع + 5) − 3 ع − 18 = 0

24 ع + 60 − 3 ع − 18 = 0

21 ع + 42 = 0

ع = −2

فيكون س = 2 × (−2) + 5

س = −4 + 5

س = 1

نستنتج أن ث (1 ، −2)

2) **معادلة (أب) :**

ـ لاحظ أن (أب) هو نفسه محور الفواصل إذن معادلة (أب) هي ع = 0

معادلة (حم) :

ـ المستقيم (حم) هو نفسه محور التراتيب إذن معادلة (حم) هي س = 0 .

تمارين

1. أ ، ب نقطتان من المستقيم (ق) المعرّف بالمعادلة 7 س − ع + 4 = 0

ـ احسب ط ، هـ بحيث أ(2 ، هـ) ؛ ب(ط ، −4).

2. (ق) مستقيم معرّف بمعادلة ويشمل النقطتين أ ، ب.

ـ عيّن ط ، هـ في كل من الحالات الآتية :

1) (ق) : 3 س + 5 ع − 10 = 0
أ(0 ، هـ) ؛ ب(ط ، $-\frac{2}{5}$).

2) (ق) : 2 س − 3 ع + 2 = 0
أ($-\frac{3}{5}$ ، هـ) ؛ ب(ط ، 0).

3) (ق) : $\frac{10\text{س} - 6\text{ع}}{2} = 3$
أ(ط ، $\frac{7}{2}$) ؛ ب(0 ، هـ).

(م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) معلم للمستوي

3. أوجد معادلة المستقيم (أب) في كل من الحالات الآتية :

أ(1 ، 5) ، ب(3 ، $-\frac{1}{2}$).

أ(2 ، −1) ، ب(0 ، −1).

أ(0 ، 0) ، ب(−5 ، −3).

أ(−2 ، $\frac{1}{2}$) ، ب(1 ، −1).

4. ارسم المستقيم (ف) الذي يشمل النقطة ن ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}$ في كل من الحالات الآتية :

1) ن (1 ، 3) ، $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ؛

2) ن (1 ، − 4) ، $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

3) ن (−1 ، −5) ، $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4) ن 3 ، $\frac{1}{2}$ ، $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

5. (ف) مستقيم معادلته 3 س − 5 ع + 1 = 0 .

1) أوجد مركبتي شعاع توجيه للمستقيم (ف) ؟

2) ما هي ـ من بين النقط الآتية ـ النقط التي تنتمي إلى (ف) ؟

ا (1 ، 2) ؛ ب $\left(1 ، \frac{4}{5}\right)$. حـ $\left(\frac{1}{2} ، 1\right)$ ، د $\left(-\frac{1}{3} ، 0\right)$.

6. (ف) ، (ك) ، (ل) مستقيمات معادلاتها على الترتيب :

3 س − 4 ع + 3 = 0 ، $-\frac{2}{3}$ س + 3 ع − 7 = 0 ، $-\frac{3}{5}$ س + $\frac{ع}{2}$ + $\frac{1}{5}$ = 0 .

1) عيّن شعاع توجيه لكل من هذه المستقيمات ؟

2) انشىء المستقيمات (ف) ، (ك) ، (ل) .

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

7. ا (5 ، 0) ، ب (1 ، 2) ، حـ (−3 ، −2) هي رؤوس مثلث .

ـ أوجد معادلة لحامل كل ضلع من المثلث ا ب حـ .

8. أ (6 ، 0) ، ب (12 ، 0) ، حـ (0 ، ـ 6) ثلاث نقط من المستوي .
1) بيّن أن س – ع – 6 = 0 هي معادلة للمستقيم (أ حـ) .
وأن س – 2 ع – 12 = 0 هي معادلة للمستقيم (ب حـ) .
2) (ل) مستقيم معادلته س + ع = 0 .
بيّن أن (ل) يقطع (أ حـ) في النقطة ء (3 ، – 3) ويقطع (ب حـ) في النقطة هـ (4 ، – 4) .
3) احسب إحداثيات النقط ف ، و ، ك منتصفات [م حـ] ، [أ حـ] ، [ب ء] على الترتيب .

9. (ك) ، (ل) ، (ف) ، (و) مستقيمات من المستوي .
معادلاتها على الترتيب هي :

$$- 2 + ع = 0 ، 5 س + 2 ع - \frac{43}{2} = 0 ، س - \frac{7}{2} = 0 ، 2 س - 5 ع = 0 .$$

1) بيّن أن م ∋ (و) .
2) عيّن شعاع توجيه لكل من : (ك) ، (ل) ، (ف) ، (و) ؟
3) بيّن أن للمستقيمات (ك) ، (ل) ، (ف) نقطة مشتركة .
4) ارسم المستقيمات الأربعة (ك) ، (ل) ، (ف) ، (و) .

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي .
10. (و) ، (ك) مستقيمان معادلتاهما على الترتيب هما :

$$3 س - 2 ع + 2 = 0 ، - \frac{3}{4} س + \frac{ع}{2} - 2 = 0$$

1) عيّن شعاع توجيه لكل من المستقيمين (و) ، (ك) .
2) بيّن أن (و) ، (ك) متوازيان تماماً .
3) ارسم (و) و (ك) .

11. (ق) مستقيم معادلته -2 س $+ 5$ ع $+ 10 = 0$.
ا ، ب نقطتا تقاطع (ق) مع (س س′) ، (ع ع′) على الترتيب .
1) احسب إحداثيي النقطتين ا ، ب .
2) أوجد معادلة للمستقيم (ك) الموازي للمستقيم (ع′ع) والذي يشمل ا .
3) أوجد معادلة للمستقيم (ل) الموازي لـ (س′ س) والذي يشمل ب .
4) إذا كان (ك) ∩ (ل) = { حـ } . أوجد إحداثيي النقطة حـ .

12. ا (5 ، 0) ، ب (1 ، 2) ، حـ (-3 ، -2) نقط من المستوي .
1) احسب مركبتي شعاع توجيه كل من $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{احـ}$ ، ثم بيّن أن النقط ا ، ب ، حـ تعيّن مثلثًا .
2) ا′ ، ب′ ، حـ′ منتصفات [ب حـ] ، [حـ ا] ، [ا ب] على الترتيب .
أحسب إحداثيي كل من ا′ ، ب′ ، حـ′ .
3) أحسب مركبتي كل من $\overleftarrow{اا′}$ ، $\overleftarrow{بب′}$ ، $\overleftarrow{حـحـ′}$
4) عيّن معادلة لحامل كل من متوسطات المثلث ا ب حـ .
5) بيّن أن ث (1 ، 0) هي مركز ثقل المثلث ا ب حـ ، واستنتج أن
$\overleftarrow{ثا} + \overleftarrow{ثب} + \overleftarrow{ثحـ} = 0$.

13. 1) حل في ح × ح كلاً من الجملتين الآتيتين :

$$\begin{cases} 3\text{ س} - 9\text{ ع} = -6 \\ 6\text{ س} + 3\text{ ع} = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\text{ س} - 6\text{ ع} + 8\text{ ع} = 0 \\ \text{س} + 3\text{ ع} - 5 = 0 \end{cases}$$

2) (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي ، حل بيانيًا الجملتين السابقتين .

14. (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي .
(ق) ، (ك) مستقيمان معادلتاهما : ع = س + 6 ، ع = -2 س + 3 .

1) ارسم (ق) ، (ك) .
2) عيّن بيانيًا إحداثيي نقطة تقاطع ۄ للمستقيمين (ق) ، (ك) .
3) تحقّق حسابيًا

15. (ق) ، (ك) ، (ل) مستقيمات من المستوي معادلاتها على الترتيب :

$$ع = س + 4 \text{ ، } ع = -\frac{2}{3} س - 1 \text{ ، } ع = -4 س + 9 .$$

1) ارسم (ق) ، (ك) ، (ل) .
2) نعتبر المستقيمات الثلاثة هي حوامل أضلاع مثلث .
احسب إحداثيات رؤوس هذا المثلث .

16. (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس .
ا (3 ، 0) ، ب (3 ، – 2) ، حـ (– 1 ، – 2) نقط من المستوي .
1) بيّن أن النقط ا ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة .
2) أوجد معادلة حامل كل ضلع من أضلاع المثلث ا ب حـ .
3) بيّن أن النقطتين ء (– 5 ، – 4) و ۄ (7 ، 2) تنتميان إلى (ا حـ) .
4) هـ ، هـ' منتصفا الضلعين [ا ب] ، [ب حـ] على الترتيب .
ا) أوجد معادلة المستقيم (هـ هـ') .
ب) بيّن أن (هـ هـ') // (ا حـ) .

17. ا ، ب ، حـ ، ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوي المزوّد بالمعلم (ا ، $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{احـ}$) .
1) عيّن إحداثيي كل من النقاط ا ، ب ، حـ بالنسبة إلى المعلم (ا ، $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{احـ}$) .
2) اكتب معادلة لكل متوسط في المثلث ا ب حـ .
3) أوجد إحداثيي مركز ثقل المثلث ا ب حـ .
4) عيّن إحداثيي كل من النقطتين ء ، هـ بحيث يكون كل من الرباعيين ا ب ء حـ ، ا ث ب هـ متوازي أضلاع .

9 التناسب والتطبيق الخطي ـ التطبيق التآلفي

الأعداد المتناسبة

1. أمثلة وتعريف :

مثال 1 : في الجدول الآتي سجّلت نتائج متحرّك من نقطة ب إلى نقطة حـ ، حيث السطر الأول يمثل المسافات المقطوعة (بالكيلومتر) في أزمنة مقدرة (بالساعة) مسجلة في السطر الثاني .

المسافة (كم)	5	20	45	60	80
الزمن (سا)	1	4	9	12	16

لاحظ أن : $\frac{5}{1}=5$ و $\frac{20}{4}=5$ ، $\frac{45}{9}=5$ ، $\frac{60}{12}=5$ ، $\frac{80}{16}=5$.

نستنتج أن $\frac{5}{1}=\frac{20}{4}=\frac{45}{9}=\frac{60}{12}=\frac{80}{16}$.

ـ نقول إن الأعداد 5 ، 20، 45 ، 60 ، 80 **متناسبة** على الترتيب مع الأعداد 1 ، 4 ، 9 ، 12 ، 16 .

ـ إن النسبة $\frac{ف}{ز}$ ثابتة وتسمى سرعة المتحرك . لدينا في هذا المثال $\frac{ف}{ز}=5$.

أي أن سرعة المتحرك في هذا المثال تساوي 5 كم / سا .

مثال 2 : نابض مثبت ، نعلّق في طرفه الحركتلة ع (بالغرام) ونعيّن في كل مرّة الإستطالة س (بالسنتيمتر) ؛ ونسجل النتائج في الجدول الآتي :

الكتلة (غ)	5	15	20	25
الاستطالة (سم)	2	6	8	10

لاحظ أن : $\frac{5}{2} = 2,5$ ، $\frac{15}{6} = 2,5$ ، $\frac{20}{8} = 2,5$ ، $\frac{25}{10} = 2,5$.

إن الأعداد 5 ، 15 ، 20 ، 25 **متناسبة** على الترتيب مع الأعداد 2 ، 6 ، 8 ، 10 .

أي $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = \frac{25}{10}$.

تعريف :

الأعداد الحقيقية غير المعدومة $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ على الترتيب

معناه

$$\frac{ع_1}{س_1} = \frac{ع_2}{س_2} = \frac{ع_3}{س_3} = \frac{ع_4}{س_4}$$

إن القيمة المشتركة لهذه النسب تسمى **معامل التناسب** .

ـ في المثال 1 معامل التناسب يساوي 5 .

ـ وفي المثال 2 معامل التناسب يساوي 2,5 .

تعريف : إذا كان العددان غير المعدومين $ع_1$ ، $ع_2$ متناسبين مع العددين غير المعدومين $س_1$ ، $س_2$ على الترتيب

فإن المساواة $\frac{ع_1}{س_1} = \frac{ع_2}{س_2}$ تسمى **تناسبًا** .

ونقول أيضًا إن الأعداد $ع_1$ ، $س_1$ ، $ع_2$ ، $س_2$ المعطاة بهذا الترتيب **تشكل تناسبًا** .

- $ع_1$ ، $س_2$ هما **طرفا** التناسب .
- $س_1$ ، $ع_2$ هما **وسطا** التناسب .

خواص التناسب :

ا ، ب ، ح ، ء أعداد حقيقية غير معدومة .

الخاصة 1 :

رأيت في درس الأعداد الحقيقية أن :

$\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{ء}$ يعني أن ا ء = ب ح

نستنتج من ذلك:

جُداء طرفي تناسب يساوي جُداء وسطيه .

الخاصة 2 :

- **لنبرهن على الخاصة :**

إذا شكلت الأعداد الحقيقية ا ، ب ، ح ، ء المعطاة بهذا الترتيب تناسبا أي إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{ء}$ ، فإن الأعداد ا ، ح ، ب ، ء تشكل تناسبًا آخر أي $\frac{ا}{ح} = \frac{ب}{ء}$.

البرهان :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ يعني أن أ ء = ب حـ أي أ ء = حـ ب وهذا يعني أن $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ء}}$.

فالأعداد أ ، حـ ، ب ، ء بهذا الترتيب تشكّل تناسبًا .

• يمكنك أن تبرهن بنفس الطريقة على الخاصيتين الآتيتين :

الخاصة 3 :

> **إذا شكلت الأعداد الحقيقية** أ ، ب ، حـ ، ء المعطاة بهذا الترتيب تناسبًا أي
> إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ فإن الأعداد ء ، ب ، حـ ، أ تشكل تناسبًا آخر أي $\frac{\text{ء}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$.

الخاصة 4 :

> إذا شكلت الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ ، ء المعطاة بهذا الترتيب تناسبًا أي
> إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ فإن الأعداد ب ، أ ، ء ، حـ تشكل تناسبًا آخر أي $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{ء}}{\text{حـ}}$.

خلاصة :

> إذا كان لدينا تناسب فإننا نحصل على تناسب آخر :
> • إما بتبديل موضعي وسطيه
> • وإما بتبديل موضعي طرفيه .
> • وإما بتبديل موضعي وسطيه وموضعي طرفيه في آن واحد .

حالة خاصة :

الوسط المتناسب لعددين حقيقيين

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ وكان ب = جـ = س

فإن $س^2 = أ د$

العدد س يسمى **وسطًا متناسبًا** للعددين أ ، د .

مثال : العدد $2\sqrt{6}$ هو وسط متناسب للعددين 3 ، 8 .

لأن $2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = 4 \times 6 = 3 \times 8$

أي $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{8}$.

العدد $(-2\sqrt{6})$ هو أيضًا وسط متناسب للعددين 3 ، 8 .

لأن $(-2\sqrt{6}) \times (-2\sqrt{6}) = 4 \times 6 = 3 \times 8$.

أي $\frac{3}{-2\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{6}}{8}$

1) عيّن وسطًا متناسبًا للعددين 2 ، 18 .

2) عيّن وسطًا متناسبًا للعددين $-\frac{3}{5}$ و $-\frac{15}{12}$.

3) هل يوجد وسط متناسب للعددين -25 ، 4 ؟

الخاصة 5 :

إذا كانت $ا$ ، $ب$ ، $حـ$ ، $ا'$ ، $ب'$ ، $حـ'$ أعداد حقيقية غير معدومة

و $\frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{حـ}{حـ'}$ ، وكانت $س$ ، $ع$ ، $ص$ أعدادًا حقيقية بحيث:

$س ا + ع ب + ص حـ \neq 0$ و $س ا' + ع ب' + ص حـ' \neq 0$ فإن :

$$\frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{حـ}{حـ'} = \frac{س ا + ع ب + ص حـ}{س ا' + ع ب' + ص حـ'}.$$

البرهان :

نضع $\frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{حـ}{حـ'} = ك$ ...... (1)

فيكون $ا = ك ا'$ ، $ب = ك ب'$ ، $حـ = ك حـ'$

ومنه $س ا = س (ك ا')$ ؛ $ع ب = ع (ك ب')$ ؛ $ص حـ = ك (ص حـ')$

أي $س ا = ك (س ا')$ ، $ع ب = ك (ع ب')$ ، $ص حـ = ك (ص حـ')$.

نستنتج أن $س ا + ع ب + ص حـ = ك (س ا') + ك (ع ب') + ك (ص حـ')$.

أي $س ا + ع ب + ص حـ = ك (س ا' + ع ب' + ص حـ')$.

وبما أن $س ا' + ع ب' + ص حـ' \neq 0$.

فإن $\frac{س ا + ع ب + ص ى}{س ا' + ع ب' + ص حـ'} = ك$ ...... (2)

نستنتج من (1) و (2) أن :

$$\frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{حـ}{حـ'} = \frac{س ا + ع ب + ص حـ}{س ا' + ع ب' + ص حـ'}$$

حالات خاصة :

• إذا كان س = ع = ص = 1 و أ′ + ب′ + جـ′ ≠ 0 فإن :

$$\frac{أ}{أ'}=\frac{ب}{ب'}=\frac{جـ}{جـ'}=\frac{أ+ب+جـ}{أ'+ب'+جـ'}.$$

• إذا كان س = ع = 1 و ص = 0 و أ′ + ب′ ≠ 0 فإن :

$$\frac{أ}{أ'}=\frac{ب}{ب'}=\frac{أ+ب}{أ'+ب'}.$$

• إذا كان س = 1 و ع = − 1 و ص = 0 و أ′ − ب′ ≠ 0 فإن :

$$\frac{أ}{أ'}=\frac{ب}{ب'}=\frac{أ-ب}{أ'-ب'}.$$

مثال 1 : س ، ع عددان حقيقيان حيث $\frac{س}{ع}=\frac{2}{3}$ و س + ع = 15 .

لنحسب س ، ع .

$\frac{س}{ع}=\frac{2}{3}$ يعني $\frac{س}{2}=\frac{ع}{3}$

$\frac{س}{2}=\frac{ع}{3}=\frac{س+ع}{2+3}=\frac{15}{5}=3$.

$\frac{س}{2}=3$ معناه س = 3 × 2 = 6 .

$\frac{ع}{3}=3$ معناه ع = 3 × 3 = 9 .

مثال 2 :

س ، ع عددان حقيقيان حيث $\frac{س}{ع} = \frac{7}{5}$ و س − ع = 12

ـ لنحسب س ، ع .

$\frac{س}{ع} = \frac{7}{5}$ معناه $\frac{س}{7} = \frac{ع}{5}$.

$\frac{س}{7} = \frac{ع}{5} = \frac{س - ع}{7 - 5} = \frac{12}{2} = 6$.

$\frac{س}{7} = 6$ معناه س $= 7 \times 6 = 42$.

$\frac{ع}{5} = 6$ معناه ع $= 5 \times 6 = 30$.

التطبيق الخطي

تذكّر ما يلي :

التطبيق تا من مجموعة ﻫ إلى مجموعة ﻝ هو علاقة من ﻫ إلى ﻝ ترفق كل عنصر س من ﻫ بعنصر وحيد ع من ﻝ .

نكتب : تا : ﻫ ← ﻝ

س ↦ ع

نقول إن ع هي صورة س بواسطة التطبيق تا ،

ونكتب ع = تا (س) .

1. التطبيق الخطي :

> ا عدد حقيقي .
> التطبيق تا : ح ⟵ ح
> س ⟼ ا س
> يسمى **تطبيقًا خطيًا معامله ا**

لدينا تا (س) = ا س

إذا وضعنا ع = تا (س) فيكون ع = ا س .

أمثلة :

1) كل من التطبيقات الآتية : من ح إلى ح .

تا : س ⟼ 2 س ؛ حا : س ⟼ $\sqrt{2}$ س ؛ ها : س ⟼ $-\frac{3}{5}$ س .

هو تطبيق خطي

2) التطبيق فا الذي يرفق كل عدد حقيقي س بالعدد 0 أي فا : س ⟼ 0
يسمى التطبيق **الخطي المعدوم** .

3) التطبيق قا الذي يرفق كل عدد حقيقي س بالعدد – 4 أي قا : س ⟼ – 4
هو تطبيق **ثابت** ، لكنه ليس تطبيقاً خطياً .

2. التطبيق الخطي والتناسب :

تا تطبيق خطي معامله ا

إذا أعطينا للمتغير س القيم $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ ، $س_5$ فنحصل على الصور : $ع_1$ = ا $س_1$ ، $ع_2$ = ا $س_2$ ، $ع_3$ = ا $س_3$ ، $ع_4$ = ا $س_4$ ، $ع_5$ = ا $س_5$.

وإذا كانت القيم $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ ، $س_5$ كلها غير معدومة يكون :

$$\frac{ع_1}{س_1} = \frac{ع_2}{س_2} = \frac{ع_3}{س_3} = \frac{ع_4}{س_4} = \frac{ع_5}{س_5} = أ .$$

نستنتج أن الأعداد $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ ، $ع_5$ متناسبة على الترتيب مع الأعداد غير المعدومة $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ ، $س_5$. وأن معامل التناسب هو معامل التطبيق الخطي تا .

بصفة عامة :

إذا كانت الأعداد الحقيقية غير المعدومة $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، ... متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... فهذا يعني أنه :

يوجد عدد حقيقي أ بحيث :		يوجد تطبيق خطي تا :
$ع_1 = أ س_1$ $ع_2 = أ س_2$ $ع_3 = أ س_3$ ⋮	أو	ح ← ح $س_1 \mapsto ع_1$ $س_2 \mapsto ع_2$ $س_3 \mapsto ع_3$ ⋮

مثال : تا تطبيق خطي معامله 2 .

أي : تا : ح ← ح

س ↤ 2 س .

احسب :

1) تا ($\sqrt{3}$) + تا ($\sqrt{2}$) و تا ($\sqrt{3} + \sqrt{2}$)

2) تا (7 $\sqrt{5}$) و 7 تا ($\sqrt{5}$) .

لاحظ أن :

1) تا ($\sqrt{3}$ + $\sqrt{2}$) = تا ($\sqrt{3}$) + تا ($\sqrt{2}$) .

2) تا (7 $\sqrt{5}$) = 7 تا ($\sqrt{5}$) .

لنبرهن على النظرية الآتية :

> تا تطبيق خطي من ح إلى ح معامله ا.
>
> 1) مهما يكن العددان الحقيقيان $س_1$ ، $س_2$ فإن
>
> تا ($س_1$ + $س_2$) = تا ($س_1$) + تا ($س_2$) .
>
> 2) مهما يكن العدد الحقيقي س ومهما يكن العدد ك فإن :
>
> تا (ك س) = ك . تا (س) .

البرهان :

تا : ح ← ح

س ↤ ا س .

1) لدينا تا ($س_1$) = ا $س_1$ و تا ($س_2$) = ا $س_2$.

و تا ($س_1$ + $س_2$) = ا ($س_1$ + $س_2$) = ا $س_1$ + ا $س_2$.

فيكون **تا ($س_1$ + $س_2$) = تا ($س_1$) + تا ($س_2$) .**

2) تا (ك س) = ا (ك س) = (ا ك) س = ك (ا س)

أي **تا (ك س) = ك . تا (س) .**

تا تطبيق خطي من ح إلى ح . برهن أنه مهما يكن العددان الحقيقيان $س_1$ ، $س_2$ ومهما يكن العددان الحقيقيان ل ، ك فإن :

تا (ك $س_1$ + ل $س_2$) = ك تا ($س_1$) + ل تا ($س_2$) .

استنتج أن تا ($س_1$ − $س_2$) = تا ($س_1$) − تا ($س_2$) .

ملاحظة :

يمكن البرهان على خواص التناسب باستعمال خواص التطبيق الخطي .

4. التمثيل البياني لتطبيق خطي :

مثال :

تا تطبيق خطي معرف كما يلي : تا (س) = 2 س .

ـ لنعيّن في مستو مزود بمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) مجموعة النقط ى (س ، ع) حيث ع = 2 س .

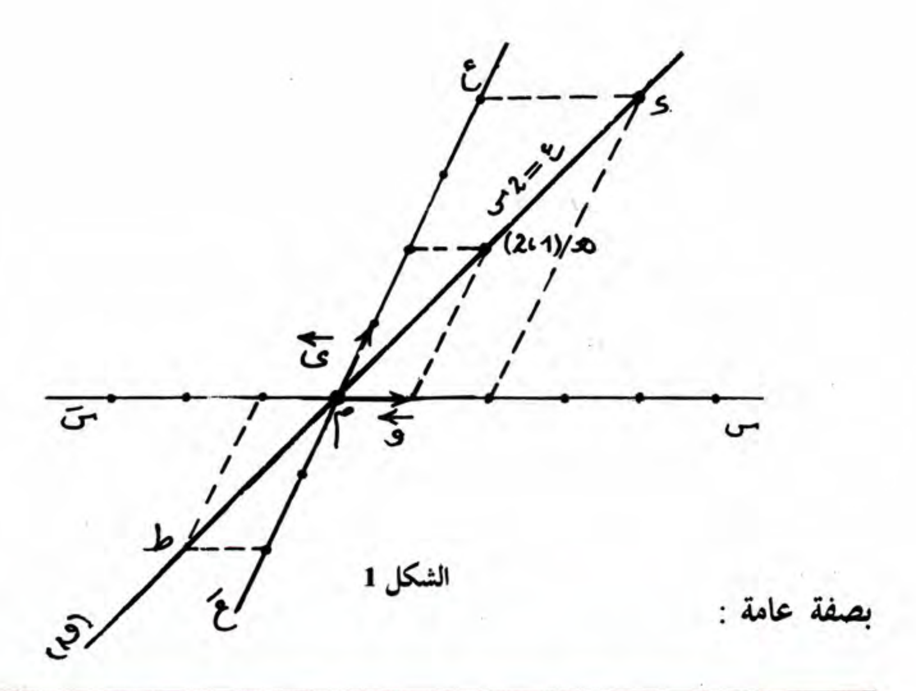
ـ تعلم أن المعادلة ع = 2 س أي ع − 2 س = 0

تعيّن في المستوي مستقيمًا (ق) يشمل المبدأ م(0 ، 0) ويوازي

الشعاع $\overleftarrow{ش}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ،

فالتطبيق الخطي المعرف كما يلي : تا (س) = 2 س

يمثّل بيانيًا بمستقيم معادلته ع = 2 س (الشكل 1)



الشكل 1

بصفة عامة :

(م ، و ، ى) معلم المستوي
التطبيق الخطى تا من ح إلى ح بحيث تا (س) = أ س .
يُمثّل بيانياً بمستقيم يشمل المبدأ م (0 ، 0) وإحدى معادلاته ع = أ س .

ملاحظة :

ـ في (الشكل 1) المستقيم (ق) يشمل النقط هـ (1 ، 2) ، ط (− 1 ، − 2) ، ى (2 ، 4) ، إن تراتيب هذه النقط 2 ، − 2 ، 4 متناسبة مع فواصلها 1 ، − 1 و 2 معامل التناسب هو 2 .

أي $\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2} = 2$.

وأيضا إن فواصل هذه النقط 1 ، – 1 ، 2 متناسبة على التوالي مع التراتيب 2 ، – 2 ، 4 ومعامل التناسب هو $\frac{1}{2}$.

أي $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4}$.

بصفة عامة :

المستقيم الذي معادلته ع = أ س هو مجموعة النقط من المستوي التي تراتيبها متناسبة مع فواصلها ومعامل هذا التناسب هو أ .

5. مقارنة صورتي عددين حقيقيين بتطبيق خطي :

مثال 1 :

تا هو التطبيق الخطي المعدوم من ح إلى ح .

لاحظ أنه مهما يكن العددان الحقيقيان $س_1$ ، $س_2$ فإن

تا ($س_1$) = 0 و تا ($س_2$) = 0 ومنه تا ($س_1$) = تا ($س_2$)

نقول إن التطبيق الخطي المعدوم **ثابت** .

مثال 2 :

تا تطبيق خطي من ح إلى ح بحيث تا (س) = $\frac{3}{2}$ س .

لاحظ الجدول الآتي :

3,5	2	1	$\frac{1}{2}$	0	1 −	$-\frac{3}{2}$	س
5,25	3	1,5	0,75	0	1,5 −	2,25 −	تا (س)

إن قيم المتغير س في هذا الجدول مرتبة ترتيبا تصاعديا وقيم تا (س) أيضا مرتبة ترتيبًا تصاعديًا أي أن صور قيم س بواسطة تا مرتبة **بنفس** ترتيب قيم س .
وبصفة عامة إذا كانت س$_1$ ، س$_2$ قيمتين للمتغير س بحيث س$_1$ < س$_2$ **فإن :**

$\frac{3}{2}$ س$_1$ < $\frac{3}{2}$ س$_2$ أي تا (س$_1$) < تا (س$_2$) ،

نقول إن التطبيق تا **متزايد .**

• يمكن أن نبرهن أن كل تطبيق خطي من ح إلى ح معامله موجب هو تطبيق متزايد .

مثال 3 :

ها تطبيق خطي من ح إلى ح بحيث ها (س) = − 4 س .

لاحظ الجدول الآتي :

5	4	3	$\frac{5}{4}$	1	0	1 −	2 −	3 −	س
20 −	16 −	12 −	5 −	4 −	0	4	8	12	ها (س)

إن قيم س مرتبة ترتيباً تصاعدياً بينما قيم ها (س) مرتبة ترتيباً تنازلياً ؛ أي أن صور قيم س بواسطة ها مرتبة **بعكس** ترتيب قيم س .

بصفة عامة إذا كانت $س_1$ ، $س_2$ قيمتين للمتغير س بحيث $س_1 < س_2$ فإن

$-4 س_1 > -4 س_2$ أي ها ($س_1$) > ها ($س_2$) .

نقول إن التطبيق ها **متناقص** .

- يمكن أن نبرهن أن كل تطبيق خطي من ح إلى ح معامله سالب هو تطبيق متناقص .

خلاصة :

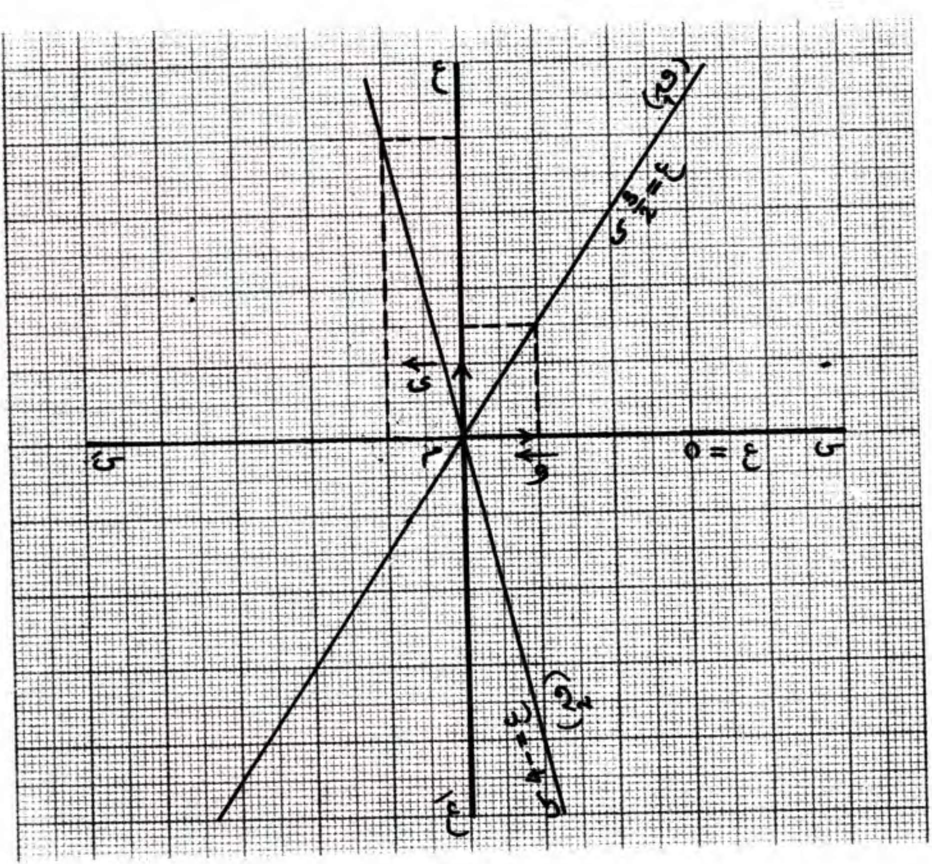
تا تطبيق خطي من ح إلى ح معامله أ .
- إذا كان أ = 0 فإن التطبيق تا ثابت .
- إذا كان أ > 0 فإن التطبيق تا متزايد .
- إذا كان أ < 0 فإن التطبيق تا متناقص .

ملاحظة :

– مناقشة تزايد أو تناقص أو ثبوت تطبيق خطي يسمى دراسة تغيرات هذا التطبيق .

– لدينا في الشكل 2(حيث (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس لمستوي) التمثيل البياني لكل من التطبيقات الخطية الواردة في الأمثلة السابقة أي المستقيمات (س'س) ، (ق$_1$) ، (ق$_2$) التي معادلاتها على الترتيب : ع = 0 ،

ع = $\frac{3}{2}$ س ، ع = – 4 س .



الشكل 2

التطبيق التآلفي

1. أمثلة وتعريف :

مثال :

رأيت في مثال سابق الجدول الآتي الذي يبين نتائج حركة منتظمة سرعتها 5 كم / سا ، تمت بين النقطتين ب ، ح .

المسافة (كم)	5	20	45	60	80
الزمن (سا)	1	4	9	12	16

• لاحظ تناسب المسافات المقطوعة مع مقادير الأزمنة المحددة

انطلاقا من هذا الجدول عرّفنا تطبيقًا خطيًا :

تا : $ع^+ \longrightarrow ع^+$

$ز \longmapsto 5ز$

وإذا فرضنا الآن أنّ المتحرك قد قطع قبل النقطة ب مسافة قدرها 2 كم ، ابتداء من النقطة ا وإذا سجلنا الأزمنة ابتداء من النقطة ب فنحصل على الجدول الآتي :

المسافة (كم)	2	2+5	2+20	2+45	2+60	2+80
الزمن (سا)	0	1	4	9	12	16

• هل المسافات المقطوعة متناسبة مع مقادير الأزمنة المحددة ؟

انطلاقا من هذا الجدول نعرف تطبيقًا آخر ها .

ها : $ع^+ \longrightarrow ع^+$

$ز \longmapsto 5ز + 2$.

هذا التطبيق يسمى **تطبيقًا تآلفيًا** .

كل من التطبيقات الآتية :

$ها_1$: ع ← ع
س ↦ 3 س − 2

$ها_2$: ع ← ع
س ⟵ $-\frac{4}{7}$ س + 1 .

$ها_3$: ع ← ع
س ↦ $\sqrt{2}$ س − 1

يسمى تطبيقًا **تآلفيًا** .

تعريف :

ا ، ب عددان حقيقيان .
التطبيق تا : ع ← ع
س ↦ ا س + ب
يسمى تطبيقًا **تآلفيًا** .

نكتب : تا : ع ← ع
س ↦ ا س + ب .

ملاحظة :

1) تا : س ↦ ا س + ب تطبيق تآلفي من ع إلى ع

• إذا كان ب = 0 فإن تا (س) = ا س . ويكون تا هو التطبيق الخطي الذي معامله ا نستنتج أن كل تطبيق خطي هو تطبيق تآلفي خاص .

• إذا كان ا = 0 فإن تا (س) = ب ويكون تا تطبيقاً **تآلفيا** ثابتاً .

2) كل من التطبيقات من ع إلى ع الآتية ليس تطبيقًا تآلفيًا :

س ↦ 3 $س^2$ − 1 ؛ س ↦ 4 س − 5 $س^2$ + 1

س ↦ $\frac{1}{س}$ ، س ↦ $\frac{3 س - 1}{س - 2}$

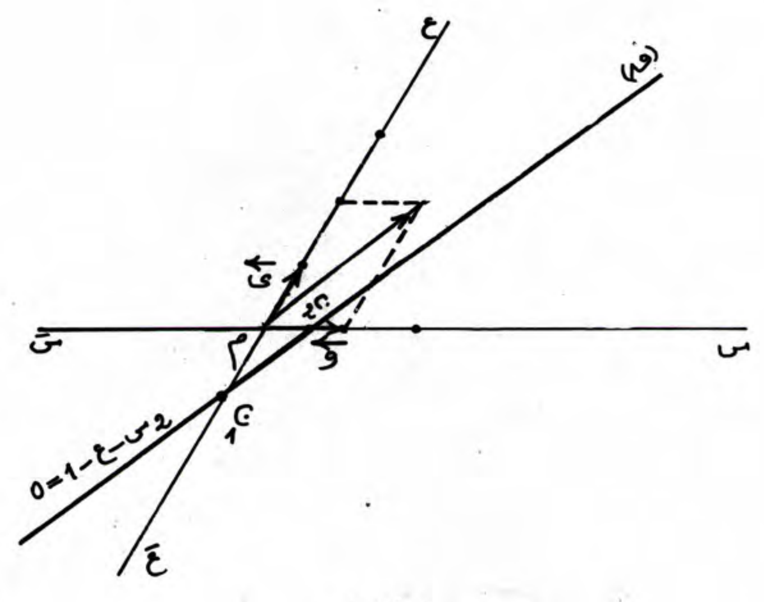
2. التمثيل البياني لتطبيق تآلفي :

مثال :

تا تطبيق تآلفي معرف كما يلي : $س \longmapsto 2س - 1$

لنعيّن في مستو مزود بمعلم (م ، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ى}$) مجموعة النقط ه (س ، ع) حيث ع $= 2س - 1$.

نعلم أن المعادلة ع $= 2س - 1$ تكافىء المعادلة $2س - ع - 1 = 0$ ، والمعادلة $2س - ع - 1 = 0$ تمثّل في المستوي مستقيمًا (ه) يوازي الشعاع $\overrightarrow{ش}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ويشمل النقطتين $ه_1$ $(0 ، -1)$ ، $ه_2$ $(\frac{1}{2} ، 0)$ (الشكل 3)



الشكل 3

بصفة عامة :

التطبيق التآلفي تا حيث تا (س) = أ س + ب
يمثّل في معلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) بمستقيم معادلته أ س − ع + ب = 0
هذا المستقيم يشمل النقطة هـ (0 ، ب) ويوازي الشعاع
$\vec{ش}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ أ \end{pmatrix}$.

3. مقارنة صورتي عددين بتطبيق تآلفي :

مثال 1 :

تا تطبيق تآلفي حيث تا (س) = 2 س + 1 .
في الجدول الآتي بعض القيم للمتغير س وصورها بالتطبيق تا .

س	3 −	2 −	1 −	0	1	2	3	4
تا (س)	5 −	3 −	1 −	1	3	5	7	9

لاحظ في الجدول أن قيم س مرتبة **بنفس** ترتيب قيم تا (س) ،
أي مرتّبة ترتيبًا تصاعديًا .
وعموماً إذا كانت $س_1$ ، $س_2$ قيمتين للمتغير س وكان $س_1 < س_2$
فإن 2 $س_1$ + 1 < 2 $س_2$ + 1 أي تا ($س_1$) < تا ($س_2$) .
نقول إن التطبيق تا **متزايد** . (معامل س في هذا المثال موجب)

مثال 2 :

تا تطبيق تآلفي بحيث تا (س) = − 2 س + 3 .
في الجدول الآتي بعض القيم للمتغير س وصورها بواسطة التطبيق تا .

س	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4	5
تا (س)	9	7	5	3	1	− 1	− 3	− 5	− 7

لاحظ في الجدول أن قيم س مرتبة **بعكس** ترتيب قيم تا (س) ،
وعموماً إذا كانت $س_1$ ، $س_2$ قيمتين للمتغير س وكان $س_1 < س_2$ فإن
− 2 $س_1$ + 3 > − 2 $س_2$ + 3 أي تا ($س_1$) > تا ($س_2$) .
نقول إن التطبيق تا **متناقص** . (معامل س في هذا المثال سالب)
بصفة عامة نستنتج ما يلي :

تا تطبيق تآلفي حيث تا (س) = أ س + ب .
- إذا كان أ > 0 فإن التطبيق تا **متزايد** .
- إذا كان أ < 0 فإن التطبيق تا **متناقص** .
- إذا كان أ = 0 فإن التطبيق تا **ثابت** .

ملاحظة : مناقشة تزايد أو تناقص أو ثبوت تطبيق تآلفي تسمى دراسة تغيرات هذا التطبيق .

تمارين

1. بيّن أن الأعداد الحقيقية 5 ، 15 ، 20 ، 25 متناسبة على الترتيب مع الأعداد الحقيقية 12 ، 36 ، 48 ، 60 .

2. بيّن أن الأعداد الحقيقية $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{12}{5}$ ، $\frac{18}{7}$ بهذا الترتيب تشكل تناسبا .

3. 1) هل الأعداد الحقيقية 8 ، 35 ، 28 ، 10 بهذا الترتيب تشكل تناسبًا .

   2) كيف يمكن ترتيبها حتّى تشكل تناسبًا ؟

4. بيّن أن الأعداد الحقيقية $2\sqrt{2}$ ، -12 ، $-\sqrt{27}$ ، 50 متناسبة على الترتيب مع الأعداد الحقيقية $\sqrt{32}$ ، -24 ، $-6\sqrt{3}$ ، 100 .

5. احسب العدد الحقيقي س في كل من الحالات الآتية :

$$\frac{-3}{5} = \frac{\text{س}}{-15} \;؛\; \frac{-\text{س}}{12} = \frac{9}{16} \;؛\; \frac{-9}{4} = \frac{5\text{س}}{-3} \;؛\; \frac{-2\text{س}}{-3} = \frac{+8}{5} \;؛$$

$$\frac{\text{س}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \;؛\; \frac{-27}{\text{س}} = \frac{15}{-2} .$$

6. أوجد العدد الحقيقي س بحيث تشكل الأعداد :

   س ، $+6$ ، -9 ، -8 تناسبًا .

   نفس السؤال في كل مما يلي :

   $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، س ، $-\frac{18}{15}$ و $\sqrt{3}$ ، س ، $-\sqrt{6}$ ، $-\sqrt{2}$.

   و -5 ، س ، -3 ، 3,8 و $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{20}$ ، $-\sqrt{2}$ ، س .

7. احسب وسطًا متناسبًا لكل ثنائية من الأعداد الحقيقية الآتية :

$\{27 ، 3\}$ ؛ $\{3 ، 48\}$ ؛ $\{\sqrt[3]{2} ، \sqrt[3]{8}\}$ ؛ $\{12,5 ، 2\}$ ؛ $\left\{\frac{6}{7} ، \frac{14}{3}\right\}$

• في التمارين من 8 إلى 11 : ا ، ب ، حـ ، د أعداد حقيقية غير معدومة .

8. 1) بيّن أنه إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}+\text{د}}{\text{د}}$.

2) بيّن أنه إذا كان : $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}+\text{د}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$.

9. برهن ما يلي :

1) إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}-\text{د}}{\text{د}}$

2) إذا كان $\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}-\text{د}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$

10. برهن أنه :

1) إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{2\text{ا}-3\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{2\text{حـ}-3\text{د}}{\text{د}}$

2) إذا كان $\frac{2\text{ا}-3\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{2\text{حـ}-3\text{د}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$.

11. برهن أنه :

1) إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{2\text{ا}+3\text{ب}}{2\text{ا}-3\text{ب}} = \frac{2\text{حـ}+3\text{د}}{2\text{حـ}-3\text{د}}$ حيث $2\text{ا}-3\text{ب} \neq 0$ و $2\text{حـ}-3\text{د} \neq 0$

12. س ، ع عددان حقيقيان .

نضع س + ع = م ، س − ع = ف ، $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \text{ك}$.

ـ احسب س ، ع في كل من الحالات الآتية :

1) م = − 40 ، ك = $\frac{2}{3}$.

2) م = 55 ، ك = − $\frac{9}{5}$.

3) ف = 16,8 ، ك = 0,3 .

4) ف = − 32 ، ك = − $\frac{3}{5}$.

13. العددان الطبيعيان س ، ع يحققان العلاقة س × 135 = ع × 225 .

1) احسب النسبة $\frac{س}{ع}$.

2) احسب س ، ع في كل من الحالات الآتية :

أ) س + ع = 288 .

ب) س − ع = 128 .

حـ) س × ع = 135 .

14. أوجد ثلاثة أعداد متناسبة مع الأعداد 3 ، 5 ، 7 بحيث يكون مجموعها 225 .

15. أوجد ثلاثة أعداد متناسبة مع الأعداد − 2,4 ، 1,6 ، − 0,8 بحيث يكون مجموعها − 4,4 .

16. محيط قطعة أرض على شكل مثلث يساوي 108 م .
وأطوال أضلاعه متناسبة مع الأعداد 4 ، 5 ، 6 .
ـ فما هي أطوال أضلاعه ؟

أ ، ب ، حـ ، ء أعداد حقيقية حيث ب و ء غير معدومين

17. برهن أنه : 1) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فإن $\frac{أ^2}{ب^2} = \frac{أ حـ}{ب ء}$.

2) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ى}$ فإن $\frac{أ^2}{ب^2} = \frac{حـ^2}{ى^2}$.

18. برهن أنه : 1) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ى}$ فإن $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2} = \frac{حـ^2 + ى^2}{ى^2}$ (حيث ب $\neq 0$ و ى $\neq 0$)

2) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ى}$ فإن $\frac{أ^2 + حـ^2}{أ^2 - حـ^2} = \frac{ب^2 + ى^2}{ب^2 - ى^2}$. حيث ب $\neq 0$ و ى $\neq 0$ و أ^2 − حـ^2 $\neq 0$ و ب^2 − ى^2 $\neq 0$.

19. تا تطبيق خطي حيث تا (س) = $-\frac{3}{4}$ س .

1) قارن بين تا ($\sqrt{2} + 1$) و تا ($\sqrt{2}$) + تا (1) .

2) قارن بين تا ($2\sqrt{3}$) و 2 تا ($\sqrt{3}$) .

20. 1) بيّن أن الأعداد الحقيقية − 6 ، 3 ، − 1 متناسبة مع الأعداد الحقيقية 8 ، − 4 ، $\frac{4}{3}$ ما هو معامل التناسب ؟

2) استنتج التطبيق الخطي تا المعين بهذا التناسب .

3) احسب تا(0) ؛ تا ($\sqrt{3}$) ؛ تا (− 2) ؛ تا $\left(\frac{1}{2}\right)$ ؛ تا $\left(-\frac{2}{5}\right)$.

21. من بين التطبيقات الخطية الآتية ما هي التطبيقات المتزايدة ؟ وما هي التطبيقات المتناقصة ؟

تا : س ⟵ $-\frac{2}{5}$ س ، ها : س ⟵ + $\sqrt{3}$ س

لا : س ⟵ − 2,5 س ؛ ما : س ⟵ $\frac{3}{7}$ س .

22. 1) ادرس تغيرات كل من التطبيقات الخطية الآتية :

تا : س ⟼ $\frac{4}{5}$ س ؛ ها : س ⟼ -3 س ؛

لا : س ⟼ 4 س .

2) مثّل بيانيًا كلاً من التطبيقات السابقة في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

23. 1) ادرس تغيرات كل من التطبيقات الخطية الآتية :

تا : س ⟼ $\frac{1}{4}$ س ؛ ها : س ⟼ 0,2 س ؛ لا : س ⟼ $-1,5$ س .

2) مثّل بيانيًا التطبيقات تا ، ها ، لا

24. تا تطبيق خطي بحيث س ⟼ $-\frac{2}{3}$ س .

1) احسب تا (0) ؛ تا (-2) ؛ تا ($\sqrt{3}$) ؛ تا $\left(\frac{1}{3}\right)$.

2) عيّن العدد الذي صورته بواسطة تا هي 0 ،

احسب س بحيث تا (س) = -10 ؛ احسب س$_1$ ، س$_2$ بحيث تا (س$_1$) = 8 ،
تا (س$_2$) = -9 .

3) مثّل بيانيًا التطبيق تا في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

25. ها تطبيق خطي بحيث ها (7) = -3

1) عيّن معامل التطبيق ها .

2) احسب ها (14) ؛ ها (-7) ؛ ها (3,5) ؛ ها ($-10,5$) .

3) مثّل بيانيًا التطبيق ها في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

26. 1) من بين التطبيقات التآلفية الآتية ما هي التطبيقات المتزايدة ؟ والتطبيقات المتناقصة ؟

تا : س ⟼ $\frac{2}{3}$ س $-$ 1 ؛ ها : س ⟼ $-\frac{3}{2}$ س + 5 ؛

لا : س ⟼ -2 س + 5 .

2) مثّل بيانيًا كلاً من هذه التطبيقات .

27. 1) عيّن التطبيق التآلفي تا : س ⟵ أ س + ب إذا علمت أن :
تا (0) = 3 ، تا (1) = 2 .
2) ادرس تغيرات التطبيق تا . مثّله بيانيًا في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

28. (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم للمستوي
1) عيّن التطبيق التآلفي الذي بيانه يشمل النقطتين
أ $\left(-\frac{1}{2} ، 5\right)$ ، ب (4 ، − 2) .
2) مثّل بيانيًا التطبيق تا .
3) هل النقطة حـ (0 ، 5) تنتمي إلى بيان التطبيق تا ؟

29. تا ، ها تطبيقان بحيث :
تا (س) = س + 1 ، ها (س) = $-\frac{2}{3}$ س + 2 .
1) حل في ح المعادلة تا (س) = ها (س) .
2) مثّل بيانيًا كلاً من تا ، ها في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

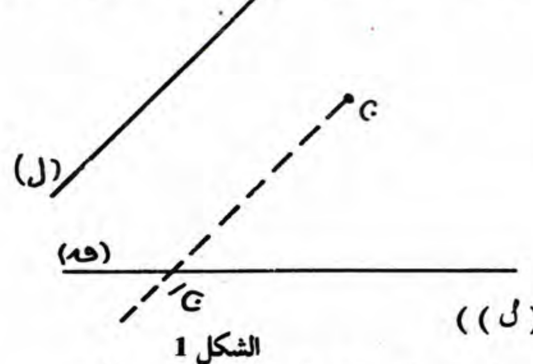
30. 1) ارسم المستقيمين (ق) ، (ك) المعرفين بالتطبيقين الآتيين :
تا : س ⟵ $\frac{1}{3}$ س + 1 ؛ ها : س ⟵ $\frac{1}{3}$ س − 5 .
2) عيّن التطبيق التآلفي ها : س ⟵ أ س + ب إذا علمت أن : ها (2) = 3 ،
ها (4) = 1 .
3) ادرس تغيرات التطبيق ها ثم مثله بيانيًا في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

10 الإسقاطات ـ نظرية طالس

الإسقاطات

1. الإسقاط الموازي لمستقيم على مستقيم :

(ﻫ) ، (ل) مستقيمان غير متوازيين ؛ ﻡ نقطة من المستوي ، (الشكل 1)



الشكل 1

نعلم أنه يوجد مستقيم **وحيد** يشمل النقطة ﻡ ويوازي المستقيم (ل) ، هذا المستقيم يقطع (ﻫ) في نقطة وحيدة ﻡ′ (لأن (ﻫ) لا يوازي (ل))

النقطة ﻡ′ تسمى **مسقط** النقطة ﻡ على المستقيم (ﻫ) وفق منحى (ل) .

نقول أيضا إنّ ﻡ′ هي **مسقط** ﻡ على (ﻫ) وفق (ل) .

- إذا كانت ﻡ ∋ (ﻫ) فإن مسقطها على (ﻫ) هو ﻡ نفسها .
- إذا كانت ﻡ ∋ (ل) فإن مسقّطها على (ﻫ) وفق (ل) هو نقطة تقاطع (ل) و (ﻫ) .

بصفة عامة :

مهما كانت النقطة ﻡ من المستوي ، فتوجد نقطة **وحيدة** ﻡ′ من المستقيم (ﻫ) بحيث تكون النقطة ﻡ′ هي مسقط ﻡ على (ﻫ) وفق (ل) ، نعرف بذلك **تطبيقًا** من المستوي إلى المستقيم (ﻫ) يسمى **الإسقاط الموازي** للمستقيم (ل) على المستقيم (ﻫ) .

تعريف :

(ﻫ) ، (ل) مستقيمان غير متوازيين .
الإسقاط الموازي للمستقيم (ل) على المستقيم (ﻫ) هو التطبيق الذي يرفق كل نقطة من المستوي بمسقطها على المستقيم (ﻫ) وفق (ل) .

حالة خاصة : **الإسقاط العمودي .**

إذا كان (ﻫ) ، (ل) مستقيمين متعامدين وكانت ج نقطة من المستوي فإن مسقط النقطة ج على (ﻫ) وفق (ل)
يسمى **المسقط العمودي** للنقطة ج .

والإسقاط الموازي للمستقيم (ل) على (ﻫ)
يسمى **الإسقاط العمودي** على (ﻫ)

الشكل 2

2. مسقط تدريج منتظم لمستقيم على مستقيم آخر وفق منحى :

1) مسقط قطعة مستقيمة :

(ﻫ) ، (ل) مستقيمان غير متوازيين ، [أ ب] قطعة مستقيمة (الشكل 3) .
أ′ ، ب′ هما مسقطا النقطتين أ ، ب على (ﻫ) وفق (ل)
إذا كانت ج نقطة من [أ ب] فإن مسقطها على (ﻫ) وفق (ل) هو نقطة ج′ من [أ′ ب′] .

• **وبصفة عامة :**
نقبل أن مسقط كل نقطة من [أ ب] على (ﻫ) وفق (ل) هو نقطة من [أ′ ب′] .

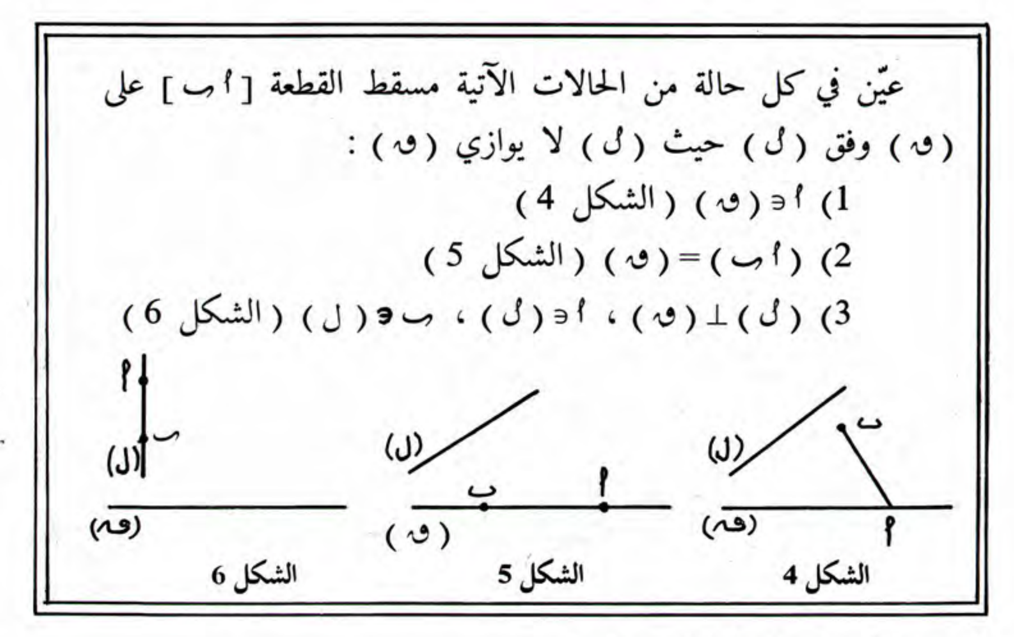
الشكل 3

القطعة [أ′ ب′] تسمى مسقط القطعة [أ ب] على (ﻫ) وفق (ل) .

ملاحظة :

1) إذا كان (أب) // (ق) فإن أب = أ'ب' .

2) إذا كان (أب) // (ل) فإن مساقط نقط القطعة [أب] على (ق) وفق (ل) متطابقة ، فيكون مسقط [أب] في هذه الحالة هو نقطة تقاطع المستقيمين (أب) و (ق) .



عيّن في كل حالة من الحالات الآتية مسقط القطعة [أب] على (ق) وفق (ل) حيث (ل) لا يوازي (ق) :

1) أ ∈ (ق) (الشكل 4)

2) (أب) = (ق) (الشكل 5)

3) (ل) ⊥ (ق) ، أ ∈ (ل) ، ب ∈ (ل) (الشكل 6)

الشكل 6 الشكل 5 الشكل 4

2) مسقط منتصف قطعة مستقيمة

[أب] قطعة مستقيمة منتصفها م ، [أ'ب'] هو مسقط [أب] على (ق) وفق (ل) .

م' هو مسقط م على (ق) وفق (ل) (الشكل 7)

لنبرهن أن م' هي منتصف [أ'ب'] .

الشكل 7

البرهان :

بما أن مسقطي النقطتين ا ، ب على (ق) وفق (ل) هما ا′ ، ب′ فإن (اا′) // (ب ب′) .

نضع (ا′ب) ∩ [د د′] = {هـ} .

في المثلث اا′ب المستقيم (د هـ) يشمل د منتصف [ا ب] ويوازي (اا′) ، فهو يشمل منتصف الضلع الآخر [ب ا′] ، إذن النقطة هـ هي منتصف [ا′ب] .

وفي المثلث ا′ب ب′ المستقيم (هـ د′) يشمل هـ منتصف [ا′ب] ويوازي (ب ب′) ، فهو يشمل منتصف الضلع الآخر [ا′ب′] ، فالنقطة د′ هي منتصف [ا′ب′] .

نتيجة :

مسقط منتصف قطعة مستقيمة هو منتصف مسقط هذه القطعة .

ملاحظة :

ا د = $\frac{1}{2}$ ا ب أي $\frac{\text{ا د}}{\text{ا ب}} = \frac{1}{2}$

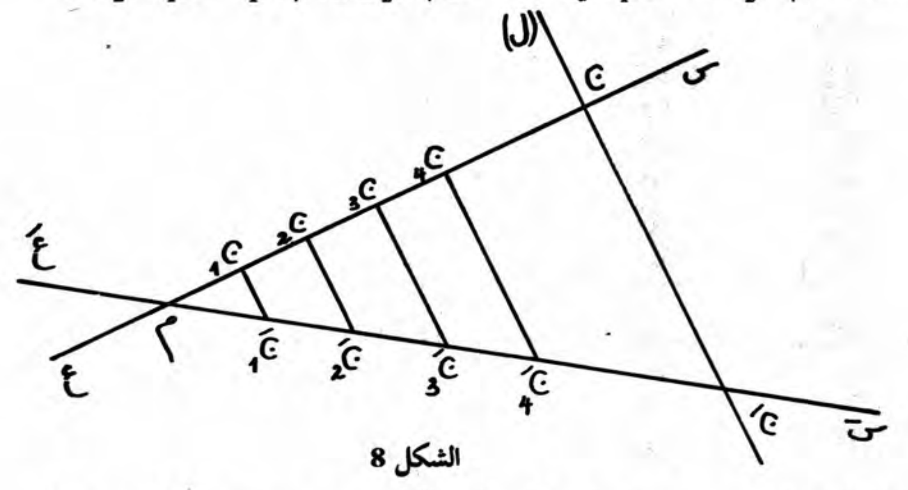
وأيضا ا′د′ = $\frac{1}{2}$ ا′ب′ أي $\frac{\text{ا′د′}}{\text{ا′ب′}} = \frac{1}{2}$

نستنتج أن : $\frac{\text{ا د}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا′د′}}{\text{ا′ب′}}$ أي $\frac{\text{ا د}}{\text{ا′د′}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا′ب′}}$.

هذا يعني أن الطولين ا د ، ا ب متناسبان على الترتيب مع الطولين ا′د′ ، ا′ب′ .

3) مسقط تدريج منتظم.

(س ع)، (س′ع′) مستقيمان متقاطعان في النقطة م، (ل) مستقيم لا يوازي أيًّا منهما؛ م، ن$_1$، ن$_2$، ن$_3$، ..... هي نقط تدريج منتظم لنصف المستقيم [م س، مساقط هذه النقط على (س′ع′) وفق (ل) هي النقط م، ن$_1$′، ن$_2$′، ن$_3$′، ....وحسب النتيجة الواردة في الفقرة 2. فالنقطة ن$_1$′هي منتصف [م ن$_2$′] لأن ن$_1$ هي منتصف [م ن$_2$] أي م ن$_1$′ = ن$_1$′ن$_2$′(1)



الشكل 8

والنقطة ن$_2$′ هي منتصف [ن$_1$′ن$_3$′] لأن ن$_2$ هي منتصف [ن$_1$ن$_3$]
أي ن$_1$′ن$_2$′ = ن$_2$′ن$_3$′(2)

ومن (1)، (2) ينتج أن م ن$_1$′ = ن$_1$′ن$_2$′ = ن$_2$′ن$_3$′. وبصفة عامة يمكن أن نبرهن أن : م ن$_1$′ = ن$_1$′ن$_2$′ = ن$_2$′ن$_3$′ = ن$_3$′ن$_4$′ = ...

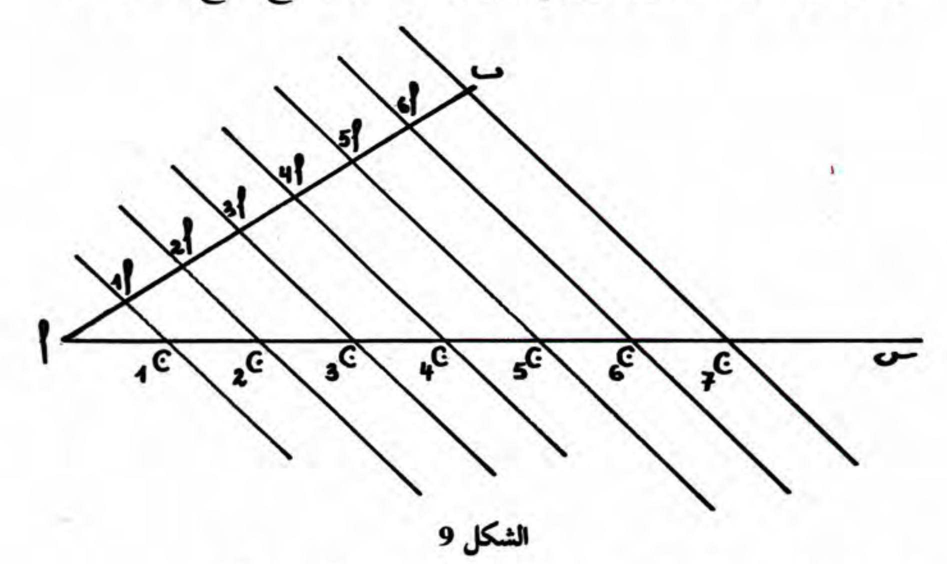
فالنقط م، ن$_1$′، ن$_2$′، ن$_3$′، ن$_4$′، ..... هي نقط تدريج منتظم لنصف المستقيم [م س′؛ هذا التدريج يسمى **مسقط التدريج المنتظم** لنصف المستقيم [م س. لاحظ أن المستقيمات (ن$_1$ن$_1$′)، (ن$_2$ن$_2$′)، (ن$_3$ن$_3$′)، ..... متوازية لأن كلاًّ منها يوازي (ل).

نتيجة :

> **مسقط تدريج منتظم هو تدريج منتظم .**

4) تقسيم قطعة مستقيمة :

[أب] قطعة مستقيمة يراد تقسيمها مثلاً إلى سبع قطع متقايسة .



الشكل 9

- نرسم نصف مستقيم [أس ، ونأخذ عليه تدريجًا منتظمًا (أ ، هـ$_1$ ، هـ$_2$ ، هـ$_3$ ، هـ$_4$ ، هـ$_5$ ، هـ$_6$ ، هـ$_7$) .
- نرسم المستقيم (ب هـ$_7$) ، ونسمي مساقط النقط هـ$_1$ ، هـ$_2$ ، هـ$_3$ ، ....، هـ$_6$ على (أب) وفق (ب هـ$_7$) النقط أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، ..... أ$_6$ على التوالي .

فالنقط أ ، أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$ ، أ$_5$ ، أ$_6$ ، ب هي نقط تدريج منتظم للقطعة [أب] ، وبذلك نحصل على التقسيم المطلوب .

ملاحظة :

• كل من النقط $أ_1$ ، $أ_2$ ، .....، $أ_6$ تقسم [أب] من الداخل بنسبة

معلومة مثلا $\frac{أأ_1}{أ_1ب} = \frac{1}{6}$ ؛ $\frac{أأ_2}{أ_2ب} = \frac{2}{5}$ ؛ $\frac{أأ_6}{أ_6ب} = \frac{6}{1}$.

• إذا اخترنا على (أب) معلمًا مثل (أ، $\overrightarrow{أأ_1}$) فيكون :

$\frac{\overline{أأ_1}}{\overline{أ_1ب}} = -\frac{1}{6}$ ، $\frac{\overline{أأ_2}}{\overline{أ_2ب}} = -\frac{2}{5}$ $\frac{\overline{أأ_6}}{\overline{أ_6ب}} = -\frac{6}{1}$.

لاحظ أن كلا من هذه النسب سالبة .

بصفة عامة :

كل نقطة من قطعة مستقيمة تقسم هذه القطعة من الداخل بنسبة **سالبة** .

نقبل أن كل نقطة تنتمي إلى حامل قطعة ولا تنتمي إلى القطعة تقسم هذه القطعة من الخارج بنسبة **موجبة** .

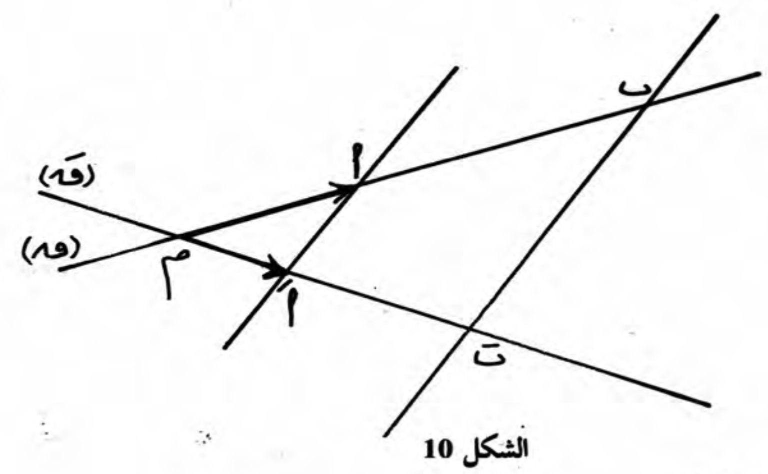
مثلاً في الشكل السابق لدينا $\frac{\overline{أأ_3}}{\overline{أب}} = +\frac{3}{7}$.

نقول إن النقطة أ تقسم القطعة [$أ_3$ب] من الخارج بالنسبة الموجبة $+\frac{3}{7}$.

نظرية طالس وتطبيقات

1. مسألة تمهيدية :

(ق) ، (ق') مستقيمان متقاطعان في النقطة م .
(م ، $\overrightarrow{\text{مأ}}$) معلم للمستقيم (ق) ؛ (م ، $\overrightarrow{\text{مأ'}}$) معلم للمستقيم (ق') ؛
ب نقطة من (ق) فاصلتها س ؛ ب' نقطة من (ق') فاصلتها س' .
(الشكل 10) .



الشكل 10

لنبرهن ما يلي :

1) إذا كان (أأ') // (ب ب') فإن س = س' .
2) إذا كان س = س' فإن (أأ') // (ب ب') .

البرهان :

1) نفرض أن (ب ب') // (أأ') ولنبرهن أن س' = س .
بما أن (ب ب') // (أأ') فإن $\overrightarrow{\text{بب'}} // \overrightarrow{\text{أأ'}}$
هذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي ك بحيث $\overrightarrow{\text{بب'}} = \text{ك}.\overrightarrow{\text{أأ'}}$
لكن $\overrightarrow{\text{بب'}} = \overrightarrow{\text{مب'}} - \overrightarrow{\text{مب}}$ و $\overrightarrow{\text{أأ'}} = \overrightarrow{\text{مأ'}} - \overrightarrow{\text{مأ}}$

إذن $\overrightarrow{\text{م ب}'} - \overrightarrow{\text{م ب}} = \text{ك}\,(\overrightarrow{\text{م ا}'} - \overrightarrow{\text{م ا}})$

أي $\overrightarrow{\text{م ب}'} - \overrightarrow{\text{م ب}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م ا}'} - \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م ا}}$.

ونعلم أن $\overrightarrow{\text{م ب}'} = \text{س}' . \overrightarrow{\text{م ا}'}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}} = \text{س} . \overrightarrow{\text{م ا}}$

نستنتج أن :

$\text{س}'\,\overrightarrow{\text{م ا}'} - \text{س}\,\overrightarrow{\text{م ا}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م ا}'} - \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م ا}}$.

$\text{س}'\,\overrightarrow{\text{م ا}'} - \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م ا}'} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{م ا}} - \text{س}\,\overrightarrow{\text{م ا}} = \overrightarrow{0}$

$(\text{س}' - \text{ك})\,\overrightarrow{\text{م ا}'} + (\text{ك} - \text{س})\,\overrightarrow{\text{م ا}} = \overrightarrow{0}$

ومنه $\overrightarrow{0} = (\text{س}' - \text{ك})\,\overrightarrow{\text{م ا}'} + (\text{ك} - \text{س})\,\overrightarrow{\text{م ا}}$

هذا يعني أن مركبتي الشعاع المعدوم في الأساس ($\overrightarrow{\text{م ا}'}$ ، $\overrightarrow{\text{م ا}}$) هما العددان ($\text{س}' - \text{ك}$) و ($\text{ك} - \text{س}$) ونعلم أنهما معدومتان .

إذن $\text{س}' - \text{ك} = 0$ و $\text{ك} - \text{س} = 0$

أي $\text{س}' = \text{ك}$ و $\text{ك} = \text{س}$

ومنه $\text{س}' = \text{س}$.

2) نفرض أن $\text{س} = \text{س}'$ ولنبرهن أن $(\text{ا ا}') // (\text{ب ب}')$.

نعلم أن $\overrightarrow{\text{م ب}} = \text{س} . \overrightarrow{\text{م ا}}$ و $\overrightarrow{\text{م ب}'} = \text{س}' . \overrightarrow{\text{م ا}'}$

فيكون : $\overrightarrow{\text{م ب}'} - \overrightarrow{\text{م ب}} = \text{س}' . \overrightarrow{\text{م ا}'} - \text{س} . \overrightarrow{\text{م ا}}$

لكن $\text{س} = \text{س}'$

إذن : $\overrightarrow{\text{م ب}'} - \overrightarrow{\text{م ب}} = \text{س} . \overrightarrow{\text{م ا}'} - \text{س} . \overrightarrow{\text{م ا}}$

$\overrightarrow{\text{م ب}'} - \overrightarrow{\text{م ب}} = \text{س}\,(\overrightarrow{\text{م ا}'} - \overrightarrow{\text{م ا}})$

وحسب علاقة شال لدينا :

$\overrightarrow{\text{م ب}'} - \overrightarrow{\text{م ب}} = \overrightarrow{\text{ب ب}'}$ و $\overrightarrow{\text{م ا}'} - \overrightarrow{\text{م ا}} = \overrightarrow{\text{ا ا}'}$

نستنتج أن $\overrightarrow{\text{ب ب}'} = \text{س} . \overrightarrow{\text{ا ا}'}$ هذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{\text{ب ب}'}$ و $\overrightarrow{\text{ا ا}'}$ متوازيان .

ومنه $(\text{ب ب}') // (\text{ا ا}')$.

نظرية :

(ق) ، (ق′) مستقيمان متقاطعان في م .
(م ، م أ) معلم للمستقيم (ق) و (م ، م أ′) معلم للمستقيم (ق′) ،
ب نقطة من (ق) ، ب′ نقطة من (ق′) .
(فاصلتا ب و ب′ متساويتان) معناه ((ب ب′) // (أ أ′))

ملاحظة : في الشكل 10 لدينا أيضًا :

$\overline{م أ} = \overline{م أ'}$ و $\overline{م ب} = \overline{م ب'}$

نستنتج أن : $\frac{\overline{م أ}}{\overline{م ب}} = \frac{\overline{م أ'}}{\overline{م ب'}}$

(ق) ، (ق′) مستقيمان متوازيان ؛ (م ، م د) معلم للمستقيم (ق) ،
(م′ ، م′ د′) معلم للمستقيم (ق′) حيث (د د′) // (م م′)
هـ نقطة من (ق) فاصلتها س ، هـ′ نقطة من (ق′) فاصلتها س′ .
برهن أن :
س = س′ معناه (هـ هـ′) // (د د′) .

2. نظرية طالس :

(ل$_1$) ، (ل$_2$) مستقيمان متوازيان ، (ق) ، (ق′) مستقيمان حيث :
(ق) يقطع (ل$_1$) و (ل$_2$) في أ ، ب ؛ (ق′) يقطع (ل$_1$) و (ل$_2$) في
أ′ ، ب′ . (الشكل 11)
(ل) مستقيم يوازي (ل$_1$) و (ل$_2$) ويقطع (ق) و (ق′) في د و د′ .
ـ لنبرهن أن $\frac{\overline{أ د}}{\overline{أ ب}} = \frac{\overline{أ' د'}}{\overline{أ' ب'}}$.

البرهان :

نزود المستقيم (ه) بالمعلم (أ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$) ،
والمستقيم (ه′) بالمعلم (أ′ ، $\overleftarrow{\text{أ′ب′}}$) .
ونسمي س فاصلة النقطة ج ،
و س′ فاصلة النقطة ج′ .

الشكل 11

فيكون :

$\overline{\text{أب}} = 1$ ؛ $\overline{\text{أ′ب′}} = 1$.

$\overline{\text{أج}} = \text{س}$ ؛ $\overline{\text{أ′ج′}} = \text{س′}$.

نستنتج أن :

$$\frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\text{س}}{1} = \text{س} \text{ ؛ } \frac{\overline{\text{أ′ج′}}}{\overline{\text{أ′ب′}}} = \frac{\text{س′}}{1} = \text{س′}$$

وبما أن (ج ج′) // (أ أ′) فإن س = س′ (حسب النظرية الواردة في الفقرة 2)

إذن $\frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\text{أ′ج′}}}{\overline{\text{أ′ب′}}}$.

نظرية :

(ل$_1$) و (ل$_2$) مستقيمان متوازيان ، (ه) و (ه′) مستقيمان يقطعان (ل$_1$) و (ل$_2$) في النقط أ ، ب و أ′ ، ب′ على التوالي .
إذا كان (ل) مستقيمًا يوازي (ل$_1$) و (ل$_2$) ويقطع (ه) و (ه′) في النقطتين ج و ج′ فإن $\frac{\overline{\text{أج}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\text{أ′ج′}}}{\overline{\text{أ′ب′}}}$.

هذه النظرية تسمى **نظرية طالس** ويمكن أن ننص عليها أيضا كما يلي :

(ق) ، (ق') مستقيمان و (ل) مستقيم لا يوازي أيًا منهما ، إذا كانت أ ، ب ، جـ نقط من (ق) مساقطها على (ق') وفق (ل) هي على التوالي أ' ، ب' ، جـ' فإن :

$$\frac{\overline{\text{أجـ}}}{\overline{\text{أب}}}=\frac{\overline{\text{أ'جـ'}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}.$$

ملاحظة :

1) يمكننا أن نبرهن أيضًا أن :

$$\frac{\overline{\text{أب}}}{\overline{\text{جـب}}}=\frac{\overline{\text{أ'ب'}}}{\overline{\text{جـ'ب'}}} \text{ ؛ } \frac{\overline{\text{جـب}}}{\overline{\text{جـأ}}}=\frac{\overline{\text{جـ'ب'}}}{\overline{\text{جـ'أ'}}}.$$

2) إذا كان $\frac{\overline{\text{أجـ}}}{\overline{\text{أب}}}=\frac{\overline{\text{أ'جـ'}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}$ فإن $\left|\frac{\overline{\text{أجـ}}}{\overline{\text{أب}}}\right| = \left|\frac{\overline{\text{أ'جـ'}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}\right|$

أي $\frac{|\overline{\text{أجـ}}|}{|\overline{\text{أب}}|}=\frac{|\overline{\text{أ'جـ'}}|}{|\overline{\text{أ'ب'}}|}$. إذن $\boxed{\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}=\frac{\text{أ'جـ'}}{\text{أ'ب'}}}$

نتيجة :

(ق) ، (ق') مستقيمان و (ل) مستقيم لا يوازي أيًا منهما ، إذا كانت أ ، ب ، جـ نقط من (ق) مساقطها على (ق') وفق (ل) هي على التوالي أ' ، ب' ، جـ' فإن :

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}=\frac{\text{أ'جـ'}}{\text{أ'ب'}}.$$

1) ا ب حـ ء شبه منحرف قاعدتاه [ا ء] ، [ب حـ] ؛
م نقطة من (ا ب) ، هـ نقطة من (ا حـ) .

برهن أنه إذا كان (م هـ) // (ب حـ) فإن $\frac{\overline{ام}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{ءهـ}}{\overline{ءحـ}}$

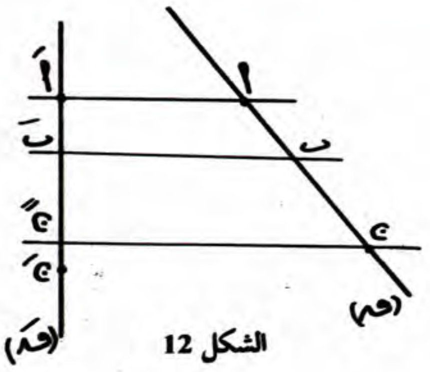
2) ا ب حـ ء متوازي أضلاع . هـ منتصف [ا ب] .

برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة هـ ويوازي (ب حـ) يقطع الضلع [ء حـ] في منتصفه .

3. النظرية العكسية

لنبرهن على النظرية الآتية التي تسمى **النظرية العكسية** لنظرية طالس .

(ق) ، (ق') مستقيمان ، (ل) مستقيم لا يوازي أيًّا منهما ؛
ا ، ب نقطتان من (ق) مسقطاهما على (ق') وفق (ل) هما ا' ، ب' .
إذا كانت م نقطة من (ق) ، م' نقطة من (ق') بحيث
$\frac{\overline{ام}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{ا'م'}}{\overline{ا'ب'}}$ فإن (م م') يوازي (ل) .



الشكل 12

البرهان :

نفرض أن م" هي مسقط م على (ق') وفق (ل) ،
فيكون حسب نظرية طالس
$\frac{\overline{ام}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{ا'م"}}{\overline{ا'ب'}}$

ولكن $\frac{\overline{\text{أم}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\text{أ'م'}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}$ (حسب المعطيات)

إذن $\frac{\overline{\text{أ'م''}}}{\overline{\text{أ'ب'}}} = \frac{\overline{\text{أ'م'}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}$

ونستنتج من هذا التناسب أن $\overline{\text{أ'م''}} = \overline{\text{أ'م'}}$

أي أن النقطتين م'' ، م' متطابقتان ، فتكون م' هي مسقط النقطة م على (ق') وفق (ل) ومنه : (م م') // (ل) .

يمكن أن نبرهن على النتيجة الآتية :

(ق) ، (ق') مستقيمان ، (ل) مستقيم لا يوازي أيًّا منهما .
أ ، ب نقطتان من (ق) مسقطاهما على (ق') وفق (ل) هما أ' ، ب' .
إذا كانت م نقطة من [أب] و م' نقطة من [أ'ب'] حيث $\frac{\overline{\text{أم}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\text{أ'م'}}}{\overline{\text{أ'ب'}}}$
فإن (م م') يوازي (ل) .

أ ب ح د شبه منحرف قاعدتاه [أد] و [ب ح] .
م نقطة من [أب] ، ه نقطة من [د ح] .
برهن أنه إذا كان $\frac{\text{أم}}{\text{أب}} = \frac{\text{د ه}}{\text{د ح}}$ فإن (م ه) // (ب ح) .

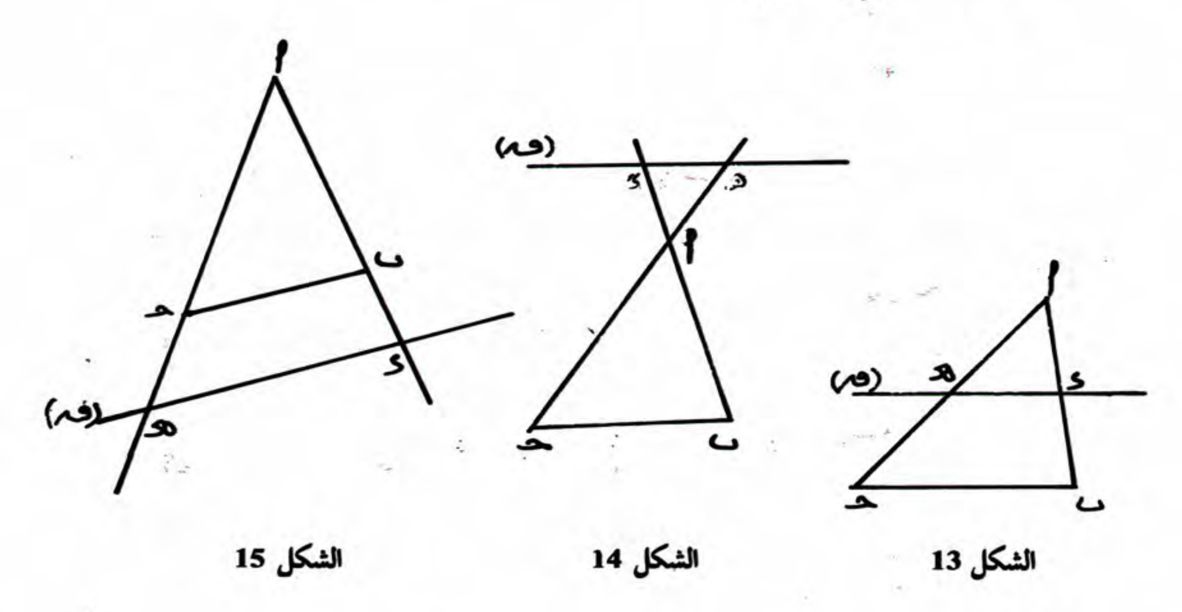
4. تطبيقات

1) تطبيق نظرية طالس على المثلث :

مسألة 1 :

اب‌ح مثلث ؛ (ﻫ) مستقيم يوازي (ب‌ح) ويقطع (اب) ، (اح) في النقطتين ء ، ﻫ . (الأشكال 13 ، 14 ، 15).

لنبرهن أن $\frac{\overline{اء}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{اﻫ}}{\overline{اح}}$.



الشكل 13 الشكل 14 الشكل 15

البرهان :

بما أن (ﻫ) // (ب‌ح) فإن مساقط النقط ﻫ ، ا ، ح على (اب) وفق (ب‌ح) هي على التوالي ء ، ا ، ب .

فحسب نظرية طالس لدينا : $\frac{\overline{اء}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{اﻫ}}{\overline{اح}}$.

نظرية :

اب‌ح مثلث .
ى نقطة من (اب) ، ﻫ نقطة من (اح) .
إذا كان (ى ﻫ) // (ب‌ح) فإن $\frac{\overline{اى}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{اﻫ}}{\overline{اح}}$. و $\frac{اى}{اب} = \frac{اﻫ}{اح}$.

يمكن أن نبرهن باستخدام النظرية العكسية لنظرية طالس على ما يلي :

اب‌ح مثلث .
ى نقطة من (اب) ، ﻫ نقطة من (اح) .
إذا كان $\frac{\overline{اى}}{\overline{اب}} = \frac{\overline{اﻫ}}{\overline{اح}}$ فإن (ى ﻫ) // (ب‌ح) .
أيضا إذا كانت ى ∈ [اب] و ﻫ ∈ [اح] و $\frac{اى}{اب} = \frac{اﻫ}{اح}$
فإن (ى ﻫ) // (ب‌ح) .

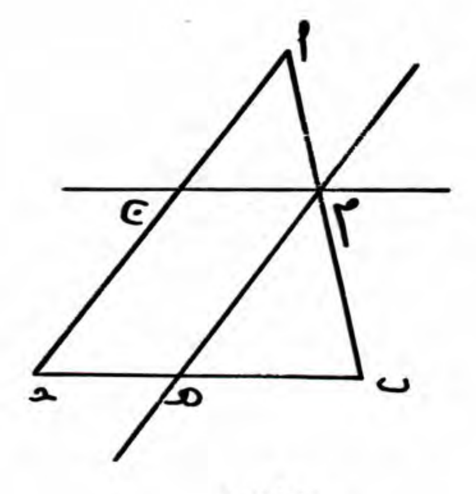
مسألة 2 :

اب‌ح مثلث ، م نقطة من [اب] و ﻥ نقطة من [اح] بحيث (م ﻥ) // (ب‌ح)

لنبرهن أن : $\frac{ام}{اب} = \frac{اﻥ}{اح} = \frac{مﻥ}{ب‌ح}$.

البرهان :

لكي نبرهن على المطلوب يكفي أن نرسم من إحدى النقطتين م أو ن الموازي لحامل الضلع الذي يشمل النقطة الأخرى.



الشكل 16

في الشكل 16 المستقيم الذي يشمل م ويوازي (أج) يقطع (بج) في النقطة هـ.

في المثلث أبج : لدينا (من) // (بج)

إذن $\frac{\text{أم}}{\text{أب}}=\frac{\text{أن}}{\text{أج}}$ ...... (1) (حسب نظرية طالس)

وأيضا في المثلث أبج : لدينا (مهـ) // (أج)

إذن $\frac{\text{أم}}{\text{أب}}=\frac{\text{جهـ}}{\text{جب}}$ ...... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن $\frac{\text{أم}}{\text{أب}}=\frac{\text{أن}}{\text{أج}}=\frac{\text{جهـ}}{\text{جب}}$.

لكن الرباعي مهـجن متوازي أضلاع لأن (من) // (هـج) ، و (مهـ) // (نج) ، فيكون جهـ = من

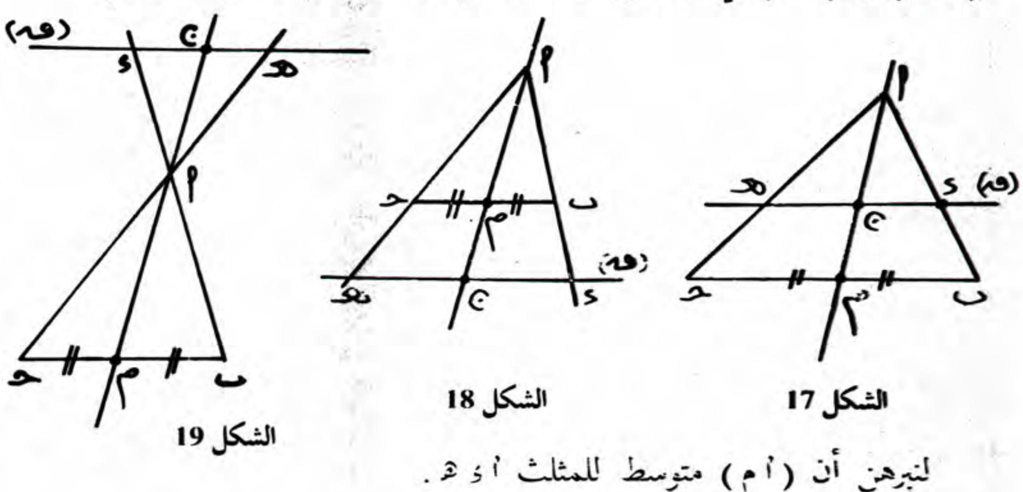
إذن $\frac{\text{أم}}{\text{أب}}=\frac{\text{أن}}{\text{أج}}=\frac{\text{من}}{\text{بج}}$.

نتيجة :

أ ب ح مثلث .
إذا كانت م نقطة من (أ ب) وكانت ن نقطة من (أ ح) بحيث
$\frac{أم}{أب} = \frac{أن}{أح} = \frac{من}{بح}$ فإن (م ن) // (ب ح) .

مسألة 3 :

أ ب ح مثلث ؛ م منتصف [ب ح] . (ق) مستقيم يوازي (ب ح) ويقطع (أ ب) و (أ ح) في النقطتين ء . هـ . (الأشكال 17 . 18 . 19)



لنبرهن أن (أ م) متوسط للمثلث أ ء هـ .

البرهان :

نضع (أ م) ∩ [ء هـ] = {ن} ؛
بتطبيق نتيجة المسألة 2 على كل من المثلثين أ ب م . أ م ح حيث
(ء ن) // (ب م) و (ن هـ) // (م ح) نجد أن :

$$\frac{أء}{أب} = \frac{أن}{أم} = \frac{ءن}{بم} \text{ و } \frac{أن}{أم} = \frac{أهـ}{أح} = \frac{نهـ}{مح}$$

نستنتج أن $\frac{ﺩ ﻥ}{ﺏ ﻡ} = \frac{ﻥ ﻫ}{ﻡ ﺣ}$

ومنه $\frac{ﺩ ﻥ}{ﻥ ﻫ} = \frac{ﺏ ﻡ}{ﻡ ﺣ}$

لكن $\frac{ﺏ ﻡ}{ﻡ ﺣ} = 1$ لأن م منتصف [ب ح]

فيكون $\frac{ﺩ ﻥ}{ﻥ ﻫ} = 1$ وهذا يعني أن ن منتصف [د ه]

أي أن (ا ن) متوسط للمثلث ا د ه .

ومنه (ا م) متوسط للمثلث ا د ه .

نتيجة :

ا ب ح مثلث ، م منتصف [ب ح] .
إذا كان (ق) مستقيماً يوازي (ب ح) ويقطع (ا ب) و (ا ح) في النقطتين د ، ه على الترتيب فإن المتوسط (ا م) للمثلث ا ب ح هو أيضامتوسط للمثلث ا د ه .

2) خواص المنصفات في مثلث :

مسألة 1 :

ا ب ح مثلث ، المنصف [ا س للزاوية [ا ب ، ا ح] يقطع [ب ح] في النقطة د .

لنبرهن أن $\frac{ﺩ ﺏ}{ﺩ ﺣ} = \frac{ﺍ ﺏ}{ﺍ ﺣ}$

البرهان :

نرسم المستقيم الذي يوازي (ا د) ويشمل ح ، فيقطع (ا ب) في النقطة هـ . (الشكل 20) .

وبتطبيق نظرية طالس على المثلث ب ح هـ نجد :

$$\frac{\text{د ب}}{\text{د ح}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا هـ}}.$$

الشكل 20

لاحظ أنه لكي نحصل على التناسب المطلوب $\frac{\text{د ب}}{\text{د ح}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ح}}$

يكفي أن نبيّن أن ا هـ = ا ح .

لدينا (ا د) // (هـ ح) .

وبما أن (ب هـ) قاطع للمستقيمين المتوازيين (ا د) ، (هـ ح) فإن الزاويتين المتماثلتين [ا ب ، ا د] و [هـ ا ، هـ ح] متقايستان أي $\widehat{\text{ب ا د}} = \widehat{\text{ا هـ ح}}$.

وبما أن (ا ح) أيضا قاطع لهما فإن :

$\widehat{\text{د ا ح}} = \widehat{\text{ا ح هـ}}$ (بالتبادل الداخلي)

ونعلم أن $\widehat{\text{ب ا د}} = \widehat{\text{د ا ح}}$ (لأن [ا س منصف [ا ب ، ا ح])

إذن $\widehat{\text{ا هـ ح}} = \widehat{\text{ا ح هـ}}$

فالمثلث ا هـ ح متساوي الساقين أي ا هـ = ا ح

وبما أن $\frac{\text{د ب}}{\text{د ح}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا هـ}}$ فإن $\frac{\text{د ب}}{\text{د ح}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ح}}$

نظرية :

ا ب حـ مثلث .

إذا كان المنصف الداخلي لزاوية الرأس ا يقطع [ب حـ] في النقطة ء فإن :

$$\frac{\text{ء ب}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$$

نقبل النظرية العكسية الآتية

ا ب حـ مثلث .

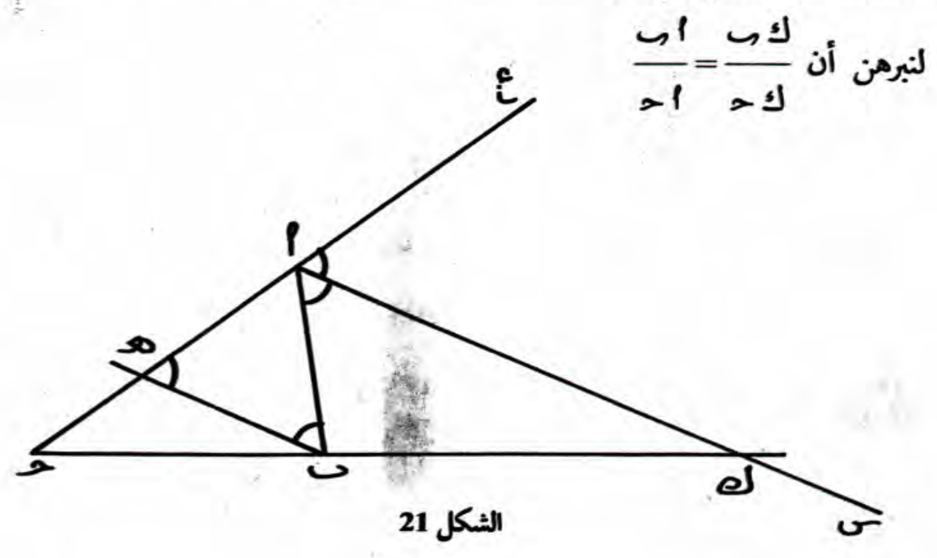
إذا كانت ء نقطة من [ب حـ] بحيث $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ ، فإن

[ا ء منصف داخلي لزاوية الرأس ا .

مسألة 2 :

ا ب حـ مثلث المنصف [ا س للزاوية الخارجية [ا ب ، ا ع] يقطع (ب حـ) في النقطة ك (الشكل 21) .

لنبرهن أن $\frac{\text{ك ب}}{\text{ك حـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$



الشكل 21

البرهان :

• نفرض أن ا حـ > ا ب ، ونرسم من ب المستقيم الذي يوازي (ا ك) فيقطع (ا حـ) في النقطة هـ .

بتطبيق نظرية طالس على المثلث ك حـ ا ، حيث (ب هـ) // (ك ا) نجد أن :

$$\frac{\overline{كب}}{\overline{كحـ}} = \frac{\overline{اهـ}}{\overline{احـ}} \text{ أو } \frac{كب}{كحـ} = \frac{اهـ}{احـ} \ldots\ldots (1)$$

لاحظ أنه لكي نحصل على التناسب المطلوب $\frac{كب}{كحـ} = \frac{اب}{احـ}$ ؛

يجب أن نبرهن أن : ا هـ = ا ب .

بما أن (ا ب) قاطع للمستقيمين المتوازيين (ا ك) ، (ب هـ) ؛

فإن $\widehat{كاب} = \widehat{ابهـ}$ (بالتبادل الداخلي) .

وبما أن (حـ ع) أيضا قاطع لهما

فإن $\widehat{عاك} = \widehat{اهـب}$ (بالتماثل) .

وبما أن $\widehat{عاك} = \widehat{كاب}$ (لأن [ا س منصف)

فإن $\widehat{ابهـ} = \widehat{اهـب}$ فالمثلث ا ب هـ متساوي الساقين

ومنه ا هـ = ا ب ...... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن $\frac{دب}{دحـ} = \frac{اب}{احـ}$.

نظرية :

ا ب حـ مثلث .

إذا كان المنصف الخارجي لزاوية الرأس ا يقطع (ب حـ) في النقطة ك

فإن : $\frac{كب}{كحـ} = \frac{اب}{احـ}$.

نقبل النظرية العكسية الآتية

> اب ح مثلث .
> إذا كانت ك نقطة من (ب ح) ولا تنتمي إلى [ب ح] بحيث
> $\frac{\text{ك ب}}{\text{ك ح}} = \frac{\text{اب}}{\text{اح}}$ ، فإن [اك منصف خارجي لزاوية الرأس ا .

مسألة محلولة

اب ح د شبه منحرف قاعدتاه [اب] و [ح د] ؛ (ق) مستقيم يوازي (اب) ويقطع [اد] و [ب ح] في النقطتين ل ، ه ، ويقطع القطرين [اح] و [ب د] في النقطتين ي ، ن .

1) قارن بين النسبتين $\frac{\text{ل ي}}{\text{د ح}}$ و $\frac{\text{ا ل}}{\text{ا د}}$ ثم بين النسبتين $\frac{\text{ن ه}}{\text{د ح}}$ و $\frac{\text{ب ه}}{\text{ب ح}}$.

2) استنتج أن ل ي = ه ن .

3) م هي نقطة تقاطع القطرين [اح] و [ب د] ، المستقيم الذي يشمل م ويوازي (ح د) يقطع [اد] و [ب ح] في النقطتين ف ، ك .
برهن أن النقطة م هي منتصف القطعة [ف ك] .

4) ط هي منتصف [اب] ، ط′ هي منتصف [د ح] .
برهن أن النقط ط′ ، م ، ط على استقامة واحدة .

المعطيات :

(اب) // (ح د) ؛ [اح] ∩ [ب د] = {م} ؛
(ق) // (اب) ؛ (ف ك) // (ح د) ؛
ط′ د = ط′ ح ؛ ط ا = ط ب .

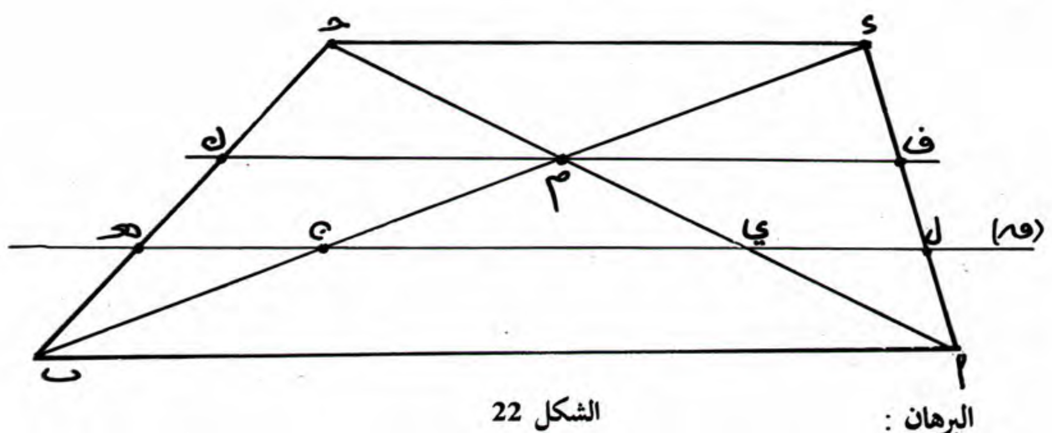
المطلوب :

1) مقارنة النسبتين $\frac{\text{ل ى}}{\text{ء جـ}}$ و $\frac{\text{ا ل}}{\text{ا ء}}$ ثم مقارنة النسبتين $\frac{\text{ن هـ}}{\text{ء جـ}}$ و $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$.

2) إثبات أن ل ى = ن هـ .

3) إثبات أن م منتصف [ف ك] .

4) إثبات أن النقط ط′ ، م ، ط على استقامة واحدة .



الشكل 22

البرهان :

1) • في المثلث ا ء جـ لدينا (ل ى) // (ء جـ)

إذن $\frac{\text{ا ل}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{ا ى}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{ل ى}}{\text{ء جـ}}$ (نتيجة من نظرية طالس) .

نستنتج أن $\frac{\text{ل ى}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ا ء}}$

• في المثلث ب ء جـ لدينا (ن هـ) // (ء جـ) .

إذن $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ن هـ}}{\text{ء جـ}}$ (نتيجة من نظرية طالس) .

نستنتج أن $\frac{\text{ن هـ}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$

2) المستقيمات (ا ب) و (ل هـ) و (ء حـ) متوازية ،
و (ا ء) و (ب حـ) قاطعان لها .

فلدينا حسب نظرية طالس : $\frac{ال}{اء} = \frac{بهـ}{بحـ}$.

وممّا سبق لدينا :

$\frac{ال}{اء} = \frac{لى}{ءحـ}$ ، $\frac{بهـ}{بحـ} = \frac{ىهـ}{ءحـ}$.

نستنتج أن $\frac{لى}{ءحـ} = \frac{ىهـ}{ءحـ}$.

نلاحظ أن لهاتين النسبتين المتساويتين نفس المقام فبسطاهما متساويان .

أي $لى = ىهـ$

3) في المثلث ا ء حـ لدينا (ف م) // (ء حـ) .

إذن $\frac{اف}{اء} = \frac{ام}{احـ} = \frac{فم}{ءحـ}$ (نتيجة من نظرية طالس)

نستنتج أن $\frac{فم}{ءحـ} = \frac{اف}{اء}$ ...... (1)

وفي المثلث ب ء حـ لدينا (م ك) // (ء حـ)

إذن $\frac{بم}{بء} = \frac{بك}{بحـ} = \frac{مك}{ءحـ}$ (نتيجة من نظرية طالس)

ومنه $\frac{مك}{ءحـ} = \frac{بك}{بحـ}$ ...... (2)

ولكن المستقيمات (ء حـ) و (ف ك) و (ا ب) متوازية والمستقيمان (ا ء) و (ب حـ) قاطعان لها .

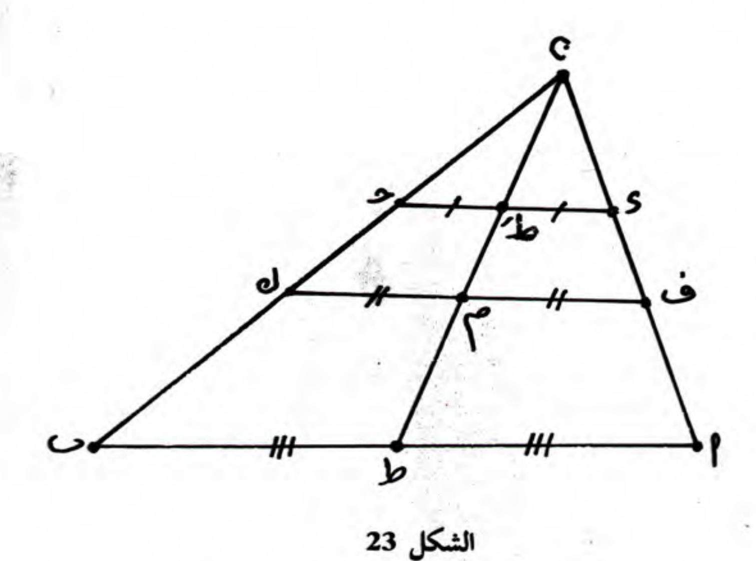
إذن $\frac{اف}{اء} = \frac{بك}{بحـ}$ ...... (3) (حسب نظرية طالس)

من (1) ، (2) ، (3) نستنتج أن $\frac{\text{ف م}}{\text{ء ح}}=\frac{\text{م ك}}{\text{ء ح}}$

ومنه ف م = م ك .

وبما أن النقط ف ، م ، ك على استقامة واحدة ، فالنقطة م هي منتصف [ف ك] .

4) نضع (أ ء) ∩ (ب ح) = { ه } (الشكل 23) .



الشكل 23

• في المثلث ه ف ك لدينا (ء ح) // (ف ك) و (ه م) متوسط له ،
فالنقطة ط' التي هي منتصف [ء ح] تنتمي إلى (ه م) ،
هذا يعني أن النقط ه ، ط' ، م على استقامة واحدة .

• وفي المثلث ه أ ب لدينا (ف ك) // (أ ب) و (ه ط) متوسط له ،
فالنقطة م التي هي منتصف [ف ك] تنتمي إلى (ه ط)
وهذا يعني أن ه ، م ، ط على استقامة واحدة .
نستنتج من ذلك أن النقط ط' ، م ، ط على استقامة واحدة

تمارين

1. (ق) ، (ق′) مستقيمان متقاطعان في النقطة م ؛ ا ، ب نقطتان من (ق) ؛
(ل) مستقيم لا يوازي (ق) ولا (ق′) ؛
ا′ ، ب′ هما مسقطا ا ، ب على (ق′) وفق (ا ب) على الترتيب .

1) برهن أن $\frac{\overline{ما}}{\overline{مب}} = \frac{\overline{ما'}}{\overline{مب'}}$

2) المستقيم الذي يشمل ب′ ويوازي (ا′ ب) يقطع (ق) في النقطة حـ . قارن بين $\frac{\overline{ما}}{\overline{مب}}$ و $\frac{\overline{مب}}{\overline{محـ}}$ ثم استنتج أن $\overline{مب}^2 = \overline{ما} \times \overline{محـ}$.

2. [م س ، [م ع ، [م ص ثلاثة أنصاف مستقيمات ، ا ، د نقطتان من [م س ،
ب نقطة من [م ع ، حـ نقطة من [م ص ، د′ هي مسقط د على [م ع وفق (ا ب) .
د″ هي مسقط د′ على [م ص وفق (ب حـ) .

- برهن أن (ا حـ) // (د د″) .

3. ا ب حـ مثلث ، ا′ منتصف [ب حـ] ، المستقيم (ق) الذي يشمل ا′ ويوازي (ا ب) يقطع (ا حـ) في د ، والمستقيم (ق′) الذي يشمل ا ويوازي (ب حـ) يقطع (ق) في هـ .

1) برهن أن د منتصف [ا حـ] .

2) برهن أن د منتصف [ا′ هـ] .

4. ا ب حـ مثلث ، م نقطة من [ب حـ] ؛ المستقيم الذي يشمل م ويوازي (ا حـ) يقطع (ا ب) في د والمستقيم الذي يشمل م ويوازي (ا ب) يقطع (ا حـ) في هـ .

1) قارن بين $\frac{ا د}{ا ب}$ و $\frac{حـ م}{حـ ب}$ ثم بيّن أن : $\frac{ا هـ}{ا حـ} = \frac{ب م}{ب حـ}$.

2) ما هو وضع النقطة م على القطعة [ب حـ] لكي يكون (د هـ) // (ب حـ) .

5. ا ب ح مثلث ، ب′ منتصف [ا ح] ، ء نقطة من [ب ح] بحيث ب ء = $\frac{1}{3}$ ب ح .

(ق) مستقيم يشمل ء ويوازي (ا ح) ويقطع (ا ب) في ه ؛ (ق′) مستقيم يشمل ء ويوازي (ا ب) ويقطع (ا ح) في و .

1) احسب كلاً من النسبتين $\frac{\text{اه}}{\text{اب}}$ ، $\frac{\text{او}}{\text{اب′}}$

2) برهن أن (ه و) // (ب ب′) .

6. ا ب ح مثلث ، ب′ هو المسقط العمودي للنقطة ب على (ا ح) و ح′ هو المسقط العمودي للنقطة ح على (ا ب) ، ء هو المسقط العمودي للنقطة ب′ على (ا ب) ، والمسقط العمودي للنقطة ح′ على (ا ح) هو النقطة ه .

1) قارن بين $\frac{\text{اء}}{\text{اح′}}$ و $\frac{\text{اب′}}{\text{اب}}$ ثم بين $\frac{\text{اه}}{\text{اب′}}$ و $\frac{\text{اح′}}{\text{اب}}$.

2) بيّن أن اء × اح = اه × اب = اب′ × اح′

3) برهن أن (ء ه) // (ب ح) .

7. وحدة الطول هي السنتيمتر.

ا ب ح مثلث حيث، اب = 7,2 ، اح = 9 ؛ ء نقطة من [ا ب] بحيث اء = 2,4

ه نقطة من [ا ح] بحيث اه = 3 .

برهن أن (ء ه) // (ب ح) .

8. وحدة الطول هي السنتيمتر.

ا ب ح ء شبه منحرف قاعدتاه [ا ب] و [ء ح] ، (ق) مستقيم يوازي كلاً من (ا ب) و (ء ح) ويقطع [ا ء] و [ب ح] في النقطتين م ، و على الترتيب ، إذا كان ام = 25 ، وح = 100

احسب اء ، ب ح .

9. ا ب ح ء شبه منحرف قاعدتاه [ا ب] و [ء ح] ؛ م منتصف [ا ء] ؛ (ق) مستقيم يشمل م ويوازي كلاً من (ا ب) و (ء ح) ويقطع [ب ح] و [ء ب] في النقطتين و ، ه على الترتيب .

برهن أن :

1) ن منتصف [ب ج] وأن هـ منتصف [ب د] .

2) $\text{م ن} = \frac{1}{2}(\text{أ ب} + \text{د ج})$.

10. أ ب ج د رباعي م نقطة من [ب د] ، المستقيم الذي يشمل م ويوازي (د ج) يقطع [ب ج] في ن ؛ المستقيم الذي يشمل م ويوازي (د أ) يقطع [أ ب] في هـ .
- برهن أن (أ ج) // (هـ ن) .

11. أ ب ج د متوازي أضلاع ؛ قطراه [أ ج] و [ب د] متقاطعان في نقطة م ؛ هـ ، ف نقطتان من [أ ج] بحيث أ هـ = هـ ف = ف ج .

1) بيّن أن م منتصف [هـ ف] .

2) بيّن أن الرباعي ب ف د هـ متوازي أضلاع .

3) المستقيمان (د ج) و (ب ف) متقاطعان في و والمستقيمان (أ ب) و (د هـ) متقاطعان في ك ، بيّن أن و ، ك منتصفا [ج د] ، [أ ب] على الترتيب .

4) برهن أن النقط و ، م ، ك على استقامة واحدة .

12. أ ب ج د متوازي أضلاع ، م منتصف [أ ب] ، ن منتصف [ج د] ، المستقيمان (د م) ، (ب ن) يقطعان القطر [أ ج] في ل و ك على الترتيب .
- برهن أن أ ل = ل ك = ك ج .

13. أ ب ج مثلث ، (و) مستقيم يقطع (ب ج) ، (ج أ) ، (أ ب) في النقط ف ، هـ ، ك على الترتيب ؛ المستقيم الذي يوازي (ف ك) ويشمل أ يقطع (ب ج) في د .

1) بيّن أن $\frac{\overline{\text{هـ ج}}}{\overline{\text{هـ أ}}} = \frac{\overline{\text{ف ج}}}{\overline{\text{ف د}}}$ وأن $\frac{\overline{\text{ك أ}}}{\overline{\text{ك ب}}} = \frac{\overline{\text{ف د}}}{\overline{\text{ف ب}}}$.

2) استنتج أن $\frac{\overline{\text{ف ج}}}{\overline{\text{ف ب}}} = \frac{\overline{\text{هـ ج}}}{\overline{\text{هـ أ}}} \times \frac{\overline{\text{ك أ}}}{\overline{\text{ك ب}}}$.

3) بيّن أن $\frac{\overline{\text{ف ب}}}{\overline{\text{ف ج}}} \times \frac{\overline{\text{هـ ج}}}{\overline{\text{هـ أ}}} \times \frac{\overline{\text{ك أ}}}{\overline{\text{ك ب}}} = 1$.

14. ابح مثلث ؛ ف ، هـ ، ك ثلاثة نقط بحيث ف ∈ (بح) ،

هـ ∈ (اح) ، ك ∪ (اب) و $\frac{\text{فب}}{\text{فح}} \times \frac{\text{هـح}}{\text{هـا}} \times \frac{\text{كا}}{\text{كب}} = 1$.

المستقيم (ف هـ) يقطع المستقيم (اب) في ك′ .

باستعمال نتائج التمرين السابق بين أن ك = ك′ . استنتج أن النقط ف ، هـ ، ك على استقامة واحدة .

15. وحدة الطول هي السنتيمتر.

ابح مثلث ، حيث بح = 10 ؛ ء و هـ نقطتان من [بح] بحيث بء = حهـ = 2 ، و نقطة من [اب] و ك نقطة من [اح] بحيث (ءك) // (اب) و (هـو) // (اح) ، (ءك) ∩ (هـو) = {ي} و (اي) ∩ (بح) = {م} .

1) قارن بين النسب $\frac{\text{مي}}{\text{اي}}$ و $\frac{\text{مء}}{\text{بء}}$ و $\frac{\text{مهـ}}{\text{هـح}}$.

2) بيّن أن م منتصف [ءهـ] .

3) قارن بين $\frac{\text{يو}}{\text{يء}}$ و $\frac{\text{ءب}}{\text{ءهـ}}$ ثم بيّن $\frac{\text{يك}}{\text{يهـ}}$ و $\frac{\text{هـح}}{\text{هـء}}$

4) بيّن أن (وك) // (بح) .

5) كيف يجب أن يكون نوع المثلث ابح حتّى يكون الرباعي اويك مستطيلا ؟ معيّنا ؟ مربعًا ؟

16. وحدة الطول هي المليمتر.

[اب] قطعة مستقيمة حيث اب = 60

1) ي نقطة من [اب] بحيث ي تقسم [اب] بالنسبة $\frac{5}{7}$.

احسب يا ، يب .

2) $د'$ نقطة من $(اب)$ بحيث $د'$ لا تنتمي إلى $[اب]$ و $د'$ تقسم القطعة $[اب]$ بالنسبة $\frac{5}{7}$.

احسب $د'ا$ ، $د'ب$ ، $\overline{دد'}$.

3) قارن بين النسبتين $\frac{\overline{دا}}{\overline{د'ا}}$ و $\frac{\overline{دب}}{\overline{د'ب}}$.

17. $(م ، \vec{و})$ معلم للمستوي ؛ ا ، ب نقطتان فاصلتاهما -2 ، $+8$ على الترتيب بالنسبة إلى هذا المعلم ، ح منتصف القطعة $[اب]$ ؛ د ، $د'$ نقطتان بحيث

$$\frac{\overline{دا}}{\overline{دب}} = -\frac{\overline{د'ا}}{\overline{د'ب}} = -\frac{2}{3}$$

1) احسب $\overline{دا}$ ، $\overline{دب}$ ، $\overline{د'ا}$ ، $\overline{د'ب}$.

2) عيّن فواصل النقط ح ، د ، $د'$.

3) تحقّق من صحة المساواتين

$\overline{حا}^2 = \overline{حد} \times \overline{حد'}$ ، $\frac{2}{\overline{اب}} = \frac{1}{\overline{اد}} + \frac{1}{\overline{اد'}}$.

18. ابح مثلث ؛ ل نقطة تقسم $[اب]$ بالنسبة $-\frac{1}{3}$ ،

د نقطة تقسم $[اح]$ بالنسبة $-\frac{1}{2}$ ، $(بد)$ يقطع $(حل)$ في م.

$(ام)$ يقطع $[بح]$ في هـ ؛ ى هو مسقط ا على $(بح)$ وفق $(بد)$ ، ف هو مسقط ا على $(بح)$ وفق $(حل)$.

1) برهن أن $\vec{بى} + \vec{بح} = \vec{0}$.

2) ما هي العلاقة بين $\overline{حف}$ و $\overline{حب}$ وبين $\overline{بى}$ و $\overline{حف}$؟

3) نضع $\frac{\overline{هـم}}{\overline{ام}} = س$. احسب كلاً من $\frac{\overline{هـب}}{\overline{بى}}$ و $\frac{\overline{هـح}}{\overline{حف}}$.

4) بيّن أن $\vec{هـب} + 3\,\vec{هـح} = \vec{0}$.

19. وحدة الطول هي السنتيمتر.

ا ب ج مثلث محيطه 11,5 .

المنصف الداخلي لزاوية الرأس ا يقطع (ب ج) في النقطة د

بحيث د ب = 3 ، د ج = 1,6 .

احسب ا ب ، ا ج .

20. وحدة الطول هي السنتيمتر.

ا ب ج مثلث حيث ب ج = 18 ، ا ج = 21 ، ا ب = 15 ،

المنصف الداخلي للزاوية التي رأسها ا ، يقطع المستقيم (ب ج) في د ، والمنصف الخارجي للزاوية التي رأسها ا يقطع المستقيم (ب ج) في د′ .

1) احسب د ب ، د ج ، د′ب ، د′ج ، د د′ .

2) بيّن أن $\frac{1}{\text{د ب}}+\frac{1}{\text{د ج}}=-\frac{1}{\text{د′ب}}-\frac{1}{\text{د′ج}}=\frac{2}{\text{د د′}}$.

طالس

فيلسوف ورياضي إغريقي عاش بين القرنين 7 ، 6 قبل الميلاد ، يُقال إنه فكر في قياس الزمن ، وأنه تنبأ بالكسوف الذي وقع عام 585 قبل الميلاد ، وأنشأ جداول زمنية مزودة بتوضيحات فلكية :

وتعزى إلى طالس النتائج الآتية :

- الزاوية المحيطية في نصف دائرة هي زاوية قائمة .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متقايستان .
- الحالة الأولى من حالات تقايس المثلثات .

أما نظرية المستقيمات المتوازية المقطوعة بقاطعين ، والمقرونة باسمه ، فيقال إنها كانت معروفة عند المصريين والبابليين قبله .

11 المتراجحات وجمل المتراجحات من الدرجة الأولى في ح

1. المجالات في ح :

مثال 1 :

تعلم أن : (س > 5) معناه (س − 5 > 0).

• المجموعة { س / س ∈ ح و س > 5 } هي جزء من ح ونسميها **المجال المفتوح** « 5 ، زائد لا نهاية ». ونرمز له بالرمز] 5 ، +∞ [



الشكل 1

هذا المجال محدود بالعدد 5 لكنه لا يشمل 5 ، أي 5 ∉] 5 ، +∞ [.

س ∈] 5 ، +∞ [معناه س > 5 .

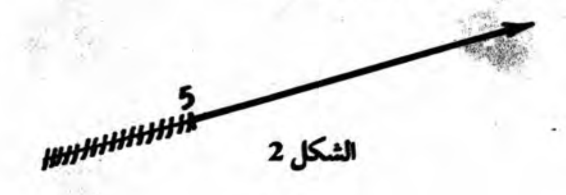
ـ الجزء الملون في الشكل 1 يمثّل المجال] 5 ، +∞ [.

• المجموعة { س / س ∈ ح و س ⩾ 5 } تكتب على الشكل [5 ، +∞ [وتسمى **المجال المغلق** من جهة 5 .

س ∈ [5 ، +∞ [معناه س ⩾ 5 .

ـ الجزء الملون في الشكل 2 يمثّل المجال [5 ، +∞ [

هذا المجال محدود بالعدد 5 ويشمل 5 .



الشكل 2

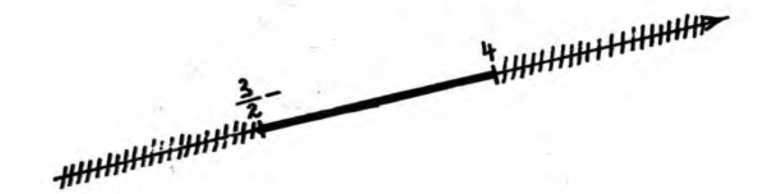
مثال 2 :

نعلم أن $\left(-\frac{3}{2} \leqslant س \leqslant 4 \right)$ معناه $\left(س \geqslant -\frac{3}{2} \text{ و } س \leqslant 4 \right)$.

المجموعة $\left\{ س / س \in ح \text{ و } -\frac{3}{2} \leqslant س \leqslant 4 \right\}$ تكتب على الشكل :

$\left[-\frac{3}{2} \text{ ، } 4 \right]$ وتسمى « **المجال المغلق** $-\frac{3}{2}$ و 4 »

العددان $-\frac{3}{2}$ ، 4 هما **حدّا** هذا المجال .



الشكل 3

الجزء الملوّن في (الشكل 3) يمثّل المجال المغلق $\left[-\frac{3}{2} \text{ ، } 4 \right]$.

$س \in \left[-\frac{3}{2} \text{ ، } 4 \right]$ معناه $-\frac{3}{2} \leqslant س \leqslant 4$.

بصفة عامة :

أ ، ب عددان حقيقيان حيث أ ≤ ب .

س > أ	س ∈]أ ، +∞[	
س ≥ أ	س ∈ [أ ، +∞[	
س < أ	س ∈]−∞ ، أ[	
س ≤ أ	س ∈]−∞ ، أ]	
أ ≤ س ≤ ب (س محصور بين أ ، ب)	س ∈ [أ ، ب]	
أ < س ≤ ب (س محصور بين أ ، ب)	س ∈]أ ، ب]	
أ ≤ س < ب (س محصور بين أ ، ب)	س ∈ [أ ، ب[	
أ < س < ب (س محصور بين أ ، ب)	س ∈]أ ، ب[	

ملاحظات :

1) لكتابة المجال [أ ، ب] نشترط أن يكون أ < ب .

إذا كان أ > ب فالكتابة [أ ، ب] ليس لها معنى .

مثلاً الكتابة [3 ، – 5] ليس لها معنى لأن 3 ليس أصغر من (– 5) .

2) إذا كان أ = ب فإن [أ ، ب] = [أ ، أ] = { أ }

3) لتمثيل مجال على محور الأعداد الحقيقية نشطب على جزء المستقيم غير المناسب ونضع دُويرة للحد المستثنى من المجال .

4) كل مجال من ح حدّاه مختلفان هو مجموعة غير منتهية .

5) [0 ، +∞ [= $ح^+$ ؛] –∞ ، 0] = $ح^-$.

ونعلم أن ح = $ح^-$ ∪ $ح^+$.

إذن ح =] –∞ ، 0] ∪ [0 ، +∞ [.

نصطلح على الكتابة : ح =] –∞ ، +∞ [.

2. مفهوم المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ح :

مسألة :

تا و ها تطبيقان من ح إلى ح حيث :

تا (س) = 5 س – 2 ؛ ها (س) = 2 س + 7 .

• أكمل الجدول الآتي بحساب بعض القيم العددية للتطبيقين تا ، ها ثم استنتج القيم العددية للمتغير س التي من أجلها يكون : تا (س) > ها (س)

س	– 4	$-\frac{7}{2}$	$\frac{2}{5}$	1	2	2,5	3	3,5	4	5
تا (س)	– 22	$-\frac{39}{2}$	0	..	8	10.5	13	...	18	..
ها (س)	– 1	0	$\frac{39}{5}$	9	11	12	13	...	15	..

لاحظ ما يلي :

1) من أجل س = 3 يكون تا (س) = ها (س)

أي 5 س − 2 = 2 س + 7

نعلم أن 5 س − 2 = 2 س + 7 هي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول س ومجموعة حلولها هي { 3 } .

2) من أجل كل عدد حقيقي س بحيث س < 3 يكون

تا (س) < ها (س) أي 5 س − 2 < 2 س + 7 .

ومن أجل كل عدد حقيقي س بحيث س > 3 يكون :

تا (س) > ها (س) أي 5 س − 2 > 2 س + 7 .

كل من (5 س − 2 < 2 س + 7) و (5 س − 2 > 2 س + 7) تسمى متراجحة **من الدرجة الأولى بالمجهول** س .

- كل عدد حقيقي يحقّق متراجحة يسمّى **حلاً** لها .

مثلا $\frac{2}{5}$ هو حل للمتراجحة 5 س − 2 < 2 س + 7 .

و 4 ليس حلاً لها .

حل متراجحة هو إيجاد مجموعة حلولها .

نبيّن فيما بعد أن مجموعة حلول المتراجحة 5 س − 2 < 2 س + 7 هي المجموعة { س / س ∈ ح و س < 3 } أي المجال] − ∞ ، 3 [.

أمثلة :

كل من 5 س − 2 ≤ 2 س + 7 ، 5 س − 2 ≥ 2 س + 7 ، $\frac{\text{س} + \sqrt{2}}{2}$ > 5 ،

$\frac{3\,\text{س} + 9}{4}$ − 2 < 0 هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ح .

$5\text{س}^2 + 1 < 3\text{س}$ ، $\dfrac{5}{2\text{س}} < 9\text{س} - 1$ ، $\text{س} - 3\text{س} < 0$ هي

متراجحات لكنها ليست من الدرجة الأولى .

3. حل المتراجحات من الدرجة الأولى في ع :

مثال 1 : لنحل في ع المتراجحة $5\text{س} - 2 < 2\text{س} + 7$ .....(1)

أي لنبحث عن مجموعة حلولها .

الحل :

نعلم أن ($5\text{س} - 2 < 2\text{س} + 7$) معناه ($5\text{س} - 2\text{س} < 2 + 7$)

لاحظ كيفية نقل الحدود من طرف إلى طرف آخر

$$5\text{س} - 2 < 2\text{س} + 7$$

$$5\text{س} - 2\text{س} < 2 + 7$$

فنحصل بذلك على المتراجحة $3\text{س} < 9$

وهي متراجحة من الشكل $\text{ا}\text{س} < \text{ب}$ ، ونعلم أنه إذا كان

$\text{ا}\text{س} < \text{ب}$ و $\text{ا}' > 0$ فإن $\text{ا}' . (\text{ا}\text{س}) < \text{ا}'\text{ب}$

إذن بضرب طرفي المتراجحة $3\text{س} < 9$ في العدد الموجب $\dfrac{1}{3}$ الذي هو مقلوب 3

نحصل على المتراجحة :

$$\frac{1}{3}(3\text{س}) < \frac{1}{3} \times 9$$

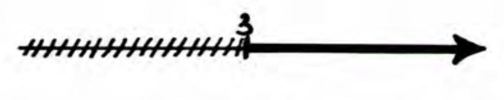
أي $\text{س} < 3$

نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي مج = $\{ س / س \in ح \text{ و } س < 3 \}$
أي المجال مج = $]-\infty ، 3[$.

الشكل 4

الجزء الملوّن في (الشكل 4) يمثّل مجموعة الحلول .

- إن مجموعة حلول المتراجحة $5س - 2 \leqslant 2س + 7$ هي المجال $]-\infty ، 3]$.
- مجموعة حلول المتراجحة $5س - 2 \geqslant 2س + 7$ هي المجال $[3 ، +\infty[$.



الشكل 5

مثال 2 :

ـ لنحل في ح المتراجحة $\frac{-7س + 3}{2} > \frac{3}{2}س - 15$.

الحل : نعلم أن $\frac{-7س + 3}{2} = \frac{-7س}{2} + \frac{3}{2}$.

إذن المتراجحة $\frac{-7س + 3}{2} > \frac{3}{2}س - 15$ تصبح على الشكل :

$$\frac{-7س}{2} + \frac{3}{2} > \frac{3}{2}س - 15$$

وبجعل الحدود التي فيها المتغير في طرف ، والحدود التي ليس فيها المتغير في الطرف الآخر مع تغيير إشارات الحدود المنقولة من طرف إلى آخر نجد :

$$-\frac{7}{2}س - \frac{3}{2}س < -\frac{3}{2} - 15$$

$$\frac{-7س - 3س}{2} < \frac{-3 - 30}{2}$$

$$-\frac{10}{2}س < -\frac{33}{2} \quad \text{أي} \quad -5س < -\frac{33}{2}$$

وهذه متراجحة من الشكل $أس < ب$

ونعلم أنه إذا كان $أس < ب$ و $أ' < 0$ فإن $أ'(أس) > أ'ب$

إذن بضرب طرفي المتراجحة $-5س < -\frac{33}{2}$ في العدد السالب $-\frac{1}{5}$ الذي هو مقلوب -5 نحصل على المتراجحة

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \times (-5س) > \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{33}{2}\right)$$

$$\text{أي} \quad س > \frac{33}{10} \quad \text{أي} \quad س > 3,3$$

نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي المجال]$-\infty$ ، 3,3[.

3,3

الشكل 6

الجزء الملوّن في (الشكل 6) يمثّل مجموعة الحلول.

• مجموعة حلول المتراجحة $\frac{-7س + 3}{2} \geqslant \frac{3}{2}س - 15$ هي المجال [3,3 ، $+\infty$[.

مثال 3 :

لنبحث عن مجموعة حلول المتراجحة الآتية :

$$\frac{3}{4}\text{س} - 5 < \frac{6\text{س} + 7}{8} - 1$$

الحل : $\frac{3}{4}\text{س} - 5 < \frac{6\text{س} + 7 - 8}{8}$ ...... (1)

أي $\frac{3}{4}\text{س} - 5 < \frac{6\text{س} - 1}{8}$

ومنه $\frac{3}{4}\text{س} - \frac{6}{8}\text{س} < -\frac{1}{8} + 5$

$\frac{3}{4}\text{س} - \frac{3}{4}\text{س} < \frac{39}{8}$

$0 \,.\, \text{س} < \frac{39}{8}$.

نعلم أنه مهما يكن العدد الحقيقي س فإن $0 \,.\, \text{س} = 0$.

وأن $0 < \frac{39}{8}$ ، نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجموعة ح أي

المجال $]-\infty \text{،} +\infty[$.

مثال 4 :

لنبحث عن مجموعة حلول المتراجحة الآتية :

$$\frac{6\text{س}}{8} - 5 > \frac{3\text{س} - 1}{4}$$

الحل : $\frac{6\text{س} - 40}{8} > \frac{3\text{س} - 1}{4}$

أي $\frac{6\text{س} - 40}{8} > \frac{6\text{س} - 2}{8}$ نضرب طرفي المتراجحة في العدد 8 نحصل على

المتراجحة : $6\text{س} - 40 > 6\text{س} - 2$

ومنه $6\text{س} - 6\text{س} > -2 + 40$

أي $0 \cdot \text{س} > 38$

نعلم أنه مهما يكن العدد الحقيقي س فإن $0 \cdot \text{س} = 0$

وأن $0 < 38$ ، نستنتج أنه لا يوجد عدد حقيقي س بحيث $0 \cdot \text{س} > 38$.

فمجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجموعة الخالية ϕ .

4. جمل المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

مثال 1 :

لنبحث عن مجموعة الأعداد الحقيقية س التي تحقّق في آن واحد المتراجحتين :

$3\text{س} - 2 \leqslant \text{س} + 1$ و $5\text{س} + 2 \geqslant 2\text{س} - 3$.

لنحل في ح كلاً من هاتين المتراجحتين :

- نعلم أن $3\text{س} - 2 \leqslant \text{س} + 1$ تعني أن $3\text{س} - \text{س} \leqslant 1 + 2$

أي $2\text{س} \leqslant 3$ ومنه $\text{س} \leqslant \frac{3}{2}$.

فمجموعة حلول المتراجحة الأولى هي : .

$$\text{مج}_1 = \left\{ \text{س} \,/\, \text{س} \in \text{ح} \text{ و } \text{س} \leqslant \frac{3}{2} \right\}$$

أي $\text{مج}_1 = \left] -\infty ، \frac{3}{2} \right]$.

• نعلم أن $5\text{س} + 2 \geqslant 2\text{س} - 3$ تعني أن $5\text{س} - 2\text{س} \geqslant -3 - 2$

أي $3\text{س} \geqslant -5$

ومنه $\text{س} \geqslant -\frac{5}{3}$

فمجموعة حلول المتراجحة الثانية هي :

$$\text{مج}_2 = \left\{ \text{س} / \text{س} \in \text{ح} \ \text{و} \ \text{س} \geqslant -\frac{5}{3} \right\}$$

أي $\text{مج}_2 = \left[-\frac{5}{3} ، +\infty \right[$.

• إن المجموعة مج التي نبحث عنها هي مجموعة الحلول المشتركة للمتراجحتين المفروضتين.

هذا يعني أن مج هي مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث

$$\left(\text{س} \geqslant -\frac{5}{3} \right) \ \text{و} \ \left(\text{س} \leqslant \frac{3}{2} \right) \quad \text{أي} \quad -\frac{5}{3} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{3}{2}$$

نستنتج أن $\text{مج} = \left\{ \text{س} / \text{س} \in \text{ح} \ \text{و} \ -\frac{5}{3} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{3}{2} \right\}$

أي $\text{مج} = \left[-\frac{5}{3} ، \frac{3}{2} \right]$

لاحظ أن $\text{مج} = \text{مج}_1 \cap \text{مج}_2$

أي $\left[-\frac{5}{3} ، \frac{3}{2} \right] = \left] -\infty ، -\frac{5}{3} \right] \cap \left[\frac{3}{2} ، +\infty \right[$

نقول إننا حلَلْنا جملة المتراجحتين:

$$\begin{cases} 3\text{س} - 2 \leqslant \text{س} + 1 \\ 5\text{س} + 2 \geqslant 2\text{س} - 3 \ . \end{cases}$$

وأن مجموعة حلولها هي المجال $\left[-\frac{5}{3} ، \frac{3}{2}\right]$

$-\frac{5}{3}$ 0 $\frac{3}{2}$

م

الشكل 7

مثال 2 :

لنحل في ع جملة المتراجحتين :

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}س - 5 \leqslant 2س - 1 \quad ......(1) \\ -\frac{9}{7} + \frac{9}{14}س < -\frac{2س - 3}{7} \quad ......(2) \end{cases}$$

• لنحل المتراجحة $-\frac{3}{4}س - 5 \leqslant 2س - 1$:

$$-\frac{3}{4}س - 2س \leqslant -1 + 5$$

$$-\frac{3}{4}س - \frac{8}{4}س \leqslant 4$$

أي $$-\frac{11}{4}س \leqslant 4$$

إذن $$س \geqslant -\frac{16}{11}$$

مجموعة حلول المتراجحة الأولى هي $مج_1 = \left[-\frac{16}{11} ، +\infty\right[$.

تمارين

1. أكمل ما يلي :

$[-2 \,؛\, +3] = \{س \,/\, س \in ح$ و $......\}$

$]-2,5 \,؛\, 6[= \{س \,/\, س \in ح$ و $......\}$

$]-\infty \,؛\, 1[= \{س \,/\, س \in ح$ و $......\}$

$]\frac{1}{2} \,؛\, +\infty[= \{س \,/\, س \in ح$ و $......\}$

2. مثّل كلاً من المجالات الآتية على محور الأعداد الحقيقية :

$[-1 \,،\, 1]$ ؛ $]-2,5 \,،\, 0[$ ؛ $]0 \,،\, 5]$ ؛ $[4 \,،\, +\infty[$ ؛ $]-\infty \,،\, \frac{3}{4}[$

3. اكتب كلاً من المجموعات الآتية على شكل مجال :

$\{س \,/\, س \in ح$ و $-2 < س < 3^2\}$

$\{س \,/\, س \in ح$ و $س \geqslant 0\}$

$\{س \,/\, س \in ح$ و $-3 \times 10^{-2} < س \leqslant 2 \times 10^{-1}\}$

$\{س \,/\, س \in ح$ و $-\sqrt{2} < س < \sqrt{3}\}$

$\{س \,/\, س \in ح$ و $|س| \geqslant 0\}$

$\{س \,/\, س \in ح$ و $س \not< -3\}$

4. إليك المجالات الآتية :

$م = [0 \,،\, 3]$ ؛ $ف = [0 \,،\, 1]$ ؛ $ل = [-3 \,،\, 2]$.

عيّن كلاً من : $م \cap ل$ ؛ $م \cup ل$ ؛ $ت_{م}^{ف}$ ، ثم اكتب هذه المجموعات بإعطاء خاصة مميزة لكل منها .

5. حل في ح كلاً من المتراجحات الآتية ثم مثّل بيانيًا في كل حالة مجموعة الحلول .

1) $5س - 7 \leqslant 3س$. ؛ 3) $1 + 2س > 3 - س$.

2) $2س + 5 > 1$. ؛ 4) $س - \frac{س}{5} \leqslant 3س - 4$.

6. نفس السؤال بالنسبة إلى المتراجحات الآتية :

1) $5\text{س} + 2 - (3\text{س} + 5) < 4\text{س} + 7$

2) $8(\text{س} - 2) + 9 \geqslant \frac{15\text{س} + 8}{2}$

3) $\frac{3}{4}\text{س} - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}\text{س} + \frac{5}{3}$

4) $\sqrt{3}\,\text{س} - 1 \leqslant \sqrt{2}$

5) $4\text{س} - \sqrt{2} \geqslant \frac{\text{س}}{2} + \frac{3}{5}$

6) $1{,}8\text{س} - 2{,}6 < 2{,}2\text{س} + 1{,}4$

7. نفس السؤال بالنسبة للمتراجحات الآتية :

1) $\frac{\text{س} + 2}{2} - \frac{2\text{س} + 3}{5} \leqslant \frac{\text{س} + 5}{4}$.

2) $\frac{14}{4} - \frac{\text{س}}{2} < 2\text{س} + \frac{7}{4}$.

3) $\frac{3\text{س} + 1}{20} + \frac{5 - 6\text{س}}{15} + \frac{3\text{س} - 5}{60} > 0$.

4) $\frac{3\text{س}}{7} - \frac{\text{س}}{3} + \frac{19}{5} < \frac{2\text{س}}{15} - 3$.

8. نفس السؤال بالنسبة للمتراجحات الآتية :

1) $\frac{5\text{س} - 3}{3} - 2 + \frac{8\text{س} - 2}{9} - \frac{10\text{س}}{15} \leqslant 0$.

2) $\frac{\text{س} - 5}{4} - \frac{\text{س} + 8}{3} \leqslant \frac{\text{س} + 11}{6}$.

3) $\frac{5\text{س}}{6}+\frac{1}{4}-\frac{7\text{س}}{12}>\frac{\text{س}}{3}+\frac{3}{16}$.

4) $\frac{3\text{س}-2}{5}-\frac{7\text{س}-1}{3}-\frac{1}{2}\leqslant 0$.

9. حل في ح جمل المتراجحات الآتية ثم مثّل بيانيًا مجموعة الحلول في كل حالة :

أ) $\begin{cases} 2\text{س}+5\geqslant 5\text{س}-4 \\ \text{س}-7\leqslant 2\text{س}-3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 9\text{س}-15>4\text{س}+3 \\ 19-5\text{س}\leqslant 7+3\text{س} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 3(14\text{س}-3)>3\text{س}-2 \\ 4(\text{س}-4)\leqslant 3\text{س}-14 \end{cases}$

10. نفس السؤال بالنسبة للجمل الآتية :

أ) $\begin{cases} 8\text{س}-5>\frac{15\text{س}-8}{2} \\ 3(2\text{س}-3)>4\text{س}+\frac{3}{4} \end{cases}$.

ب) $\begin{cases} \frac{5\text{س}-4}{3}-\frac{10\text{س}-17}{12}<\frac{8\text{س}-3}{4} \\ \frac{\text{س}}{3}-\frac{\text{س}-18}{2}\geqslant 3\text{س}-\frac{11\text{س}}{6} \end{cases}$.

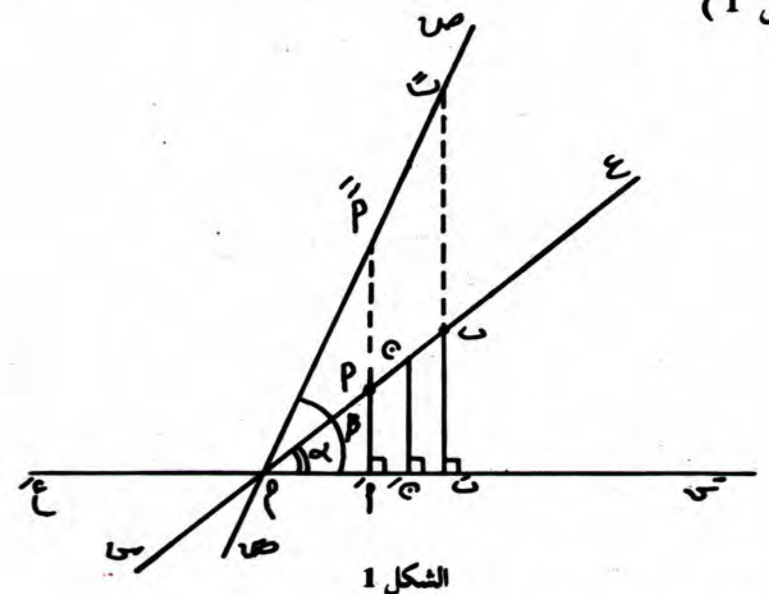
ج) $\begin{cases} \frac{\text{س}-1}{3}+\frac{4(2\text{س}-3)}{9}<\frac{5\text{س}+1}{8} \\ \frac{5\text{س}+9}{3}+\frac{7\text{س}+5}{9}\geqslant\frac{3\text{س}+21}{4} \end{cases}$.

12 العلاقات المترية في المثلث القائم
نظرية فيثاغورث

1. جيب تمام زاوية:

• (س ع)، (س'ع') مستقيمان متقاطعان في النقطة م،
حيث $\widehat{\text{ع م س'}} = \alpha$ و $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$

أ، ب نقطتان من (س ع) مسقطاهما العموديان على (س'ع') هما أ'، ب'
(الشكل 1)



الشكل 1

بمَا أن (أأ') // (ب ب').

فلدينا حسب نظرية طالس $\frac{\text{م أ'}}{\text{م ب'}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$

نستنتج أن $\frac{\text{م أ'}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م ب'}}{\text{م ب}}$.

وبصفة عامة :

مهما كانت النقطة ن من (سع) فإن :

$\frac{مٮ'}{مٮ} = \frac{م ا'}{م ا}$ حيث ن' هي المسقط العمودي للنقطة ن على (س'ع') .

نستنتج أن النسبة $\frac{مٮ'}{مٮ}$ **ثابتة**. وتساوي النسبة $\frac{م ا'}{م ا}$ المتعلقة بالزاوية [م س' ، م ع] .

هذه النسبة تسمى **جيب تمام** الزاوية [م س' ، م ع] التي قيسها α . ونرمز له بالرمز تجب α .

نكتب : تجب $\alpha = \frac{م ا'}{م ا}$.

ونقرأ : جيب تمام الزاوية التي قيسها α يساوي $\frac{م ا'}{م ا}$.

• إذا كانت [م س' ، م ص] زاوية أخرى قيسها β حيث $\beta \neq \alpha$.

$0^0 < \beta < 90^0$ ، وإذا كانت ا" ، ب" نقطتان من [م ص مسقطاهما العموديان على (س'ع') هما ا' ، ب' فإن النسبة $\frac{م ا'}{م ا''}$ ثابتة أيضا ولكنها تختلف عن النسبة

$\frac{م ا'}{م ا}$ لأن م ا" ≠ م ا .

النسبة $\frac{م ا'}{م ا''}$ تتعلق بالزاوية [م س' ، م ص] ، ويكون تجب $\beta = \frac{م ا'}{م ا''}$

لاحظ أن تجب α ≠ تجب β .

هذا يعني أنه كلّما غيرنا قيس الزاوية فإننا نحصل على نسبة ثابتة مرتبطة بقيس هذه الزاوية، وتسمى جيب تمام هذه الزاوية.

لاحظ أن [م أ] وتر في المثلث م أ أ′ أي أن م أ′ < م أ

نستنتج أن تجب $\alpha < 1$

ملاحظة :

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء ، .... نقط من المستقيم (س ع) مختلفة عن المبدأ م ومساقطها العمودية على (س′ ع′) هي النقط أ′ ، ب′ ، حـ′ ، ء′ ، .... فيمكن أن نستنتج أن :

$$\frac{\text{م أ}'}{\text{م أ}} = \frac{\text{م ب}'}{\text{م ب}} = \frac{\text{م حـ}'}{\text{م حـ}} = \frac{\text{م ء}'}{\text{م ء}} = \ldots\ldots$$

أي أن الأطوال م أ′ ، م ب′ ، م حـ′ ، م ء′ ، .... متناسبة على التوالي مع **الأطوال م أ ، م ب ، م حـ ، م ء ، ....**

وأن معامل التناسب هو جيب تمام الزاوية [م س′ ، م ع].

حالتان خاصتان :

1) إذا كان $\alpha = 0^0$ فإن [م س′ ينطبق على [م ع ، وتكون أ′ منطبقة على أ

أي م أ′ = م أ

فالنسبة $\frac{\text{م أ}'}{\text{م أ}} = 1$ وهذا يعني أن :

تجب $0^0 = 1$

2) إذا كان $\alpha = 90^0$ فإن (م س′) و (م ع) متعامدان في هذه الحالة يكون مسقط النقطة أ على [م س′ هو النقطة م نفسها. أي م أ′ = 0

فالنسبة $\frac{\text{م أ}'}{\text{م أ}} = 0$

نستنتج أن : **تجب $90^\circ = 0$**

ملاحظة :

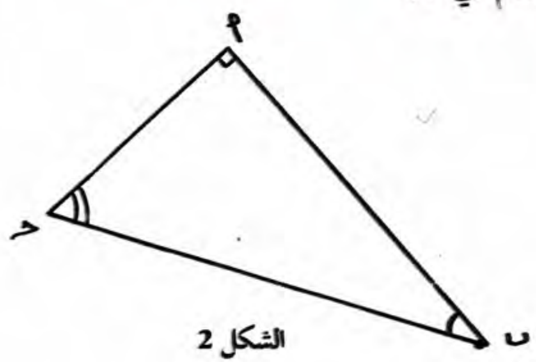
نكتفي في مستوى السنة التاسعة بدراسة جيب تمام زاوية قيسها محصور بين 0° و 90° .

بصفة عامة :

إذا كان $0^\circ \leqslant x \leqslant 90^\circ$ فإن $0 \leqslant$ تجب $x \leqslant 1$
أي تجب $x \in [0 \,.\, 1]$.

2. جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم

أ ب ح مثلث قائم في أ .



الشكل 2

كل من [ب أ ، ب ح] و [ح أ ، ح ب] هي زاوية حادة ،
[ب ح] هو الوتر ، [أ ب] ، [أ ح] هما ضلعا الزاوية القائمة .
بالنسبة إلى الزاوية [ب أ . ب ح] مثلا :

الضلع [ب أ] يسمى **الضلع المجاور** لها ، والضلع [أ ح] يسمى **الضلع المقابل** لها

لدينا تجب $\widehat{\text{ب}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{ب ح}}$ و تجب $\widehat{\text{ح}} = \frac{\text{ح أ}}{\text{ح ب}}$

يمكن أن ننص على ما يلي :

> جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم يساوي نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الوتر .

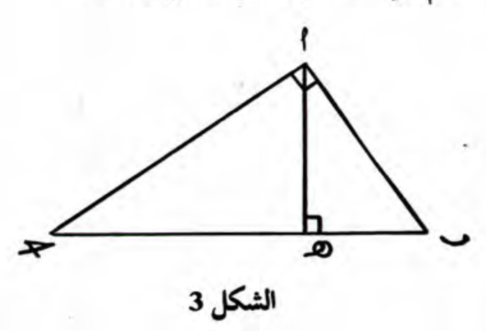
3. بعض العلاقات المترية في المثلث القائم :

توجد علاقات بين أطوال أضلاع مثلث أو بين أطوال أضلاعه وأقياس زواياه ، أو بين أطوال أضلاعه وأطوال بعض القطع الخاصة فيه ، هذه العلاقات تسمى علاقات مترية .

لنستخرج في المسائل الآتية بعض العلاقات المترية في مثلث قائم :

مسألة 1 :

أ ب ح مثلث قائم في أ ، [أ هـ] عمود له .



الشكل 3

لنبرهن أن :

1) أ ب^2 = ب هـ × ب ح .

2) أ ح^2 = ح هـ × ح ب .

البرهان :

1) في المثلث القائم $ا ب ح$ لدينا :

$$\text{تجب}\ \widehat{ب} = \frac{ب ا}{ب ح} \quad \ldots\ldots (1)$$

وفي المثلث القائم $ا ب ه$ لدينا :

$$\text{تجب}\ \widehat{ب} = \frac{ب ه}{ب ا} \quad \ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{ب ا}{ب ح} = \frac{ب ه}{ب ا}$.

إذن $ب ا \times ب ا = ب ه \times ب ح$.

أي $\boxed{ا ب^2 = ب ه \times ب ح}$ (1)

2) لدينا في المثلثين القائمين $ا ح ب$ ، $ا ح ه$:

$$\text{تجب}\ \widehat{ح} = \frac{ح ا}{ح ب} \text{ ، } \text{تجب}\ \widehat{ح} = \frac{ح ه}{ح ا}$$

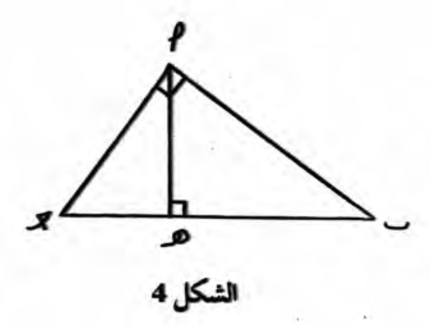
نستنتج أن $\frac{ح ا}{ح ب} = \frac{ح ه}{ح ا}$

ومنه $ح ا^2 = ح ه \times ح ب$

أي $\boxed{ا ح^2 = ح ه \times ح ب}$ (2)

مسألة 2 :

اب ح مثلث قائم وتره [ب ح] .



الشكل 4

لنبرهن أن :

$\text{اب}^2 + \text{اح}^2 = \text{بح}^2$

البرهان :

نرسم العمود [اهـ] فيكون حسب المسألة 1 :

$\text{اب}^2 = \text{به} \times \text{بح}$ ...... (1)

$\text{اح}^2 = \text{حه} \times \text{بح}$ ...... (2)

وبالجمع نجد :

$\text{اب}^2 + \text{اح}^2 = \text{به} \times \text{بح} + \text{حه} \times \text{بح}$

$\text{اب}^2 + \text{اح}^2 = (\text{به} + \text{حه}) \times \text{بح}$ ، لكن $\text{به} + \text{حه} = \text{بح}$

إذن $\text{اب}^2 + \text{اح}^2 = \text{بح} \times \text{بح}$

أي $\boxed{\text{اب}^2 + \text{اح}^2 = \text{بح}^2}$ (3)

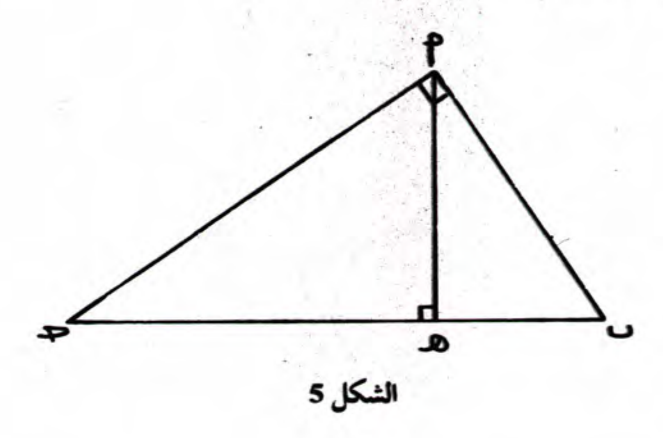
يمكن أن ننص على النظرية الآتية التي تسمى نظرية فيثاغورث

> في مثلث قائم :
> مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين

1) أ ب ح مثلث قائم في أ حيث أ ب = 3 ؛ أ ح = 4 .
هـ هي المسقط العمودي للنقطة أ على (ب ح) .
ـ احسب كلاً من ب ح . ب هـ . ح هـ .
2) أ ب ح مثلث قائم في أ ومتساوي الساقين حيث أ ب = 5 .
احسب ب ح .

مسألة 3 :

أ ب ح مثلث قائم ، [أ هـ] عمود له (الشكل 5) .
لنبرهن أن : $أهـ^2 = هـب \times هـح$



الشكل 5

البرهان :

حسب العلاقة 1 لدينا $أب^2 = بهـ \times بح$.
وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم أ هـ ب نجد :
$أب^2 = بهـ^2 + أهـ^2$.
أي : $أهـ^2 = أب^2 - بهـ^2$

نستنتج أن :

$أهـ^2 = ب هـ \times ب ح - ب هـ^2$

$أهـ^2 = ب هـ \times (ب ح - ب هـ)$

$أهـ^2 = ب هـ \times هـ ح$

أي $\boxed{أهـ^2 = هـ ب \times هـ ح}$ (4)

لاحظ في هذه العلاقة أن هـ ب و هـ ح هما طولا المسقطين العموديين للضلعين القائمين [أ ب] ، [أ ح] على (ب ح) . وأن أ هـ هو الإرتفاع المتعلق بالوتر [ب ح] .

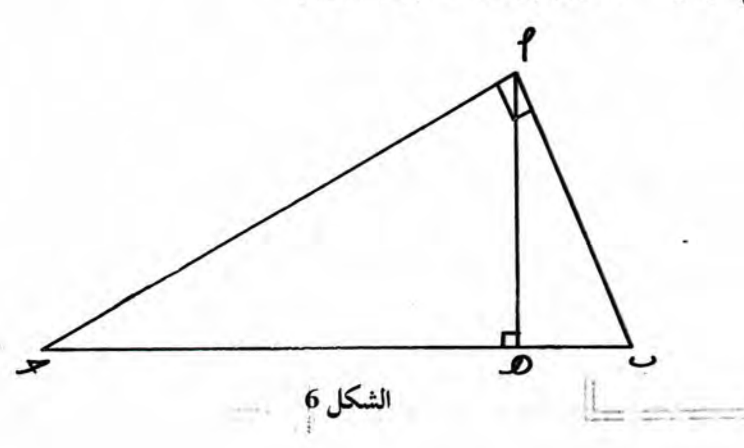
يمكن أن ننص على النظرية الآتية :

> في مثلث قائم : مربع الإرتفاع المتعلق بالوتر يساوي جداء طولي المسقطين العموديين للضلعين القائمين على الوتر .

مسألة 4 :

أ ب ح مثلث قائم في أ ، [أ هـ] عمود له (الشكل 6)

لنبرهن أن : $أ هـ \times ب ح = أ ب \times أ ح$.



الشكل 6

البرهان :

نعلم أن مساحة المثلث ا ب ح = $\frac{1}{2}$ ا ب × ا ح .

ومساحة المثلث ا ه ب = $\frac{1}{2}$ ب ه × ا ه .

ومساحة المثلث ا ه ح = $\frac{1}{2}$ ه ح × ا ه .

ولكن مجموع مساحتي المثلثين ا ه ب ، ا ه ح تساوي مساحة المثلث ا ب ح .

أي $\frac{1}{2}$ ا ه × ب ه + $\frac{1}{2}$ ا ه × ه ح = $\frac{1}{2}$ ا ب × ا ح .

إذن $\frac{1}{2}$ ا ه × (ب ه + ه ح) = $\frac{1}{2}$ ا ب × ا ح .

نستنتج أن :

ا ه × ب ح = ا ب × ا ح	...... (5)

نظرية :

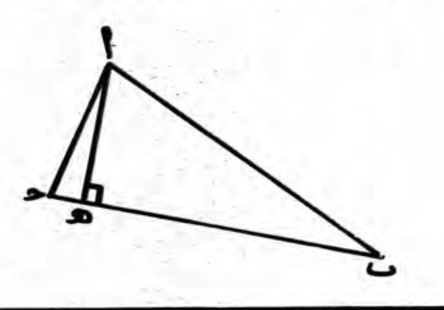
> في مثلث قائم :
> جداء طول الوتر والارتفاع المتعلق به يساوي جداء طولي الضلعين القائمين .

ا ب ح مثلث قائم في ا حيث ا ب = 6 ، ب ح = 10 .
النقطة ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) .
احسب كلاً من ا ح ، ب ه . ح ه ، ا ه .

خلاصة :

إذا كان اب ح مثلثا قائما في ا ، [اه] عمودًا له فإن :

- اب^2 = ب ه × ب ح . (1)
- اح^2 = ح ه × ح ب (2)
- اب^2 + اح^2 = ب ح^2 (3)
- اه^2 = ه ب × ه ح (4)
- اه × ب ح = اب × اح (5)



نقبل ما يلي :

- **إذا تحققت إحدى العلاقتين (3) أو (5) في مثلث اب ح حيث [اه] عمود له فإن هذا المثلث يكون قائما في الرأس ا .**

- **إذا تحققت إحدى العلاقات (1) أو (2) أو (4) في مثلث اب ح حيث [اه] عمود له و ه نقطة من [ب ح] ، فإن هذا المثلث يكون قائما في الرأس ا .**

1) اب ح مثلث حيث اب = 27 ، اح = 36 ، ب ح = 45 .
بيّن أن اب ح قائم في الرأس ا .

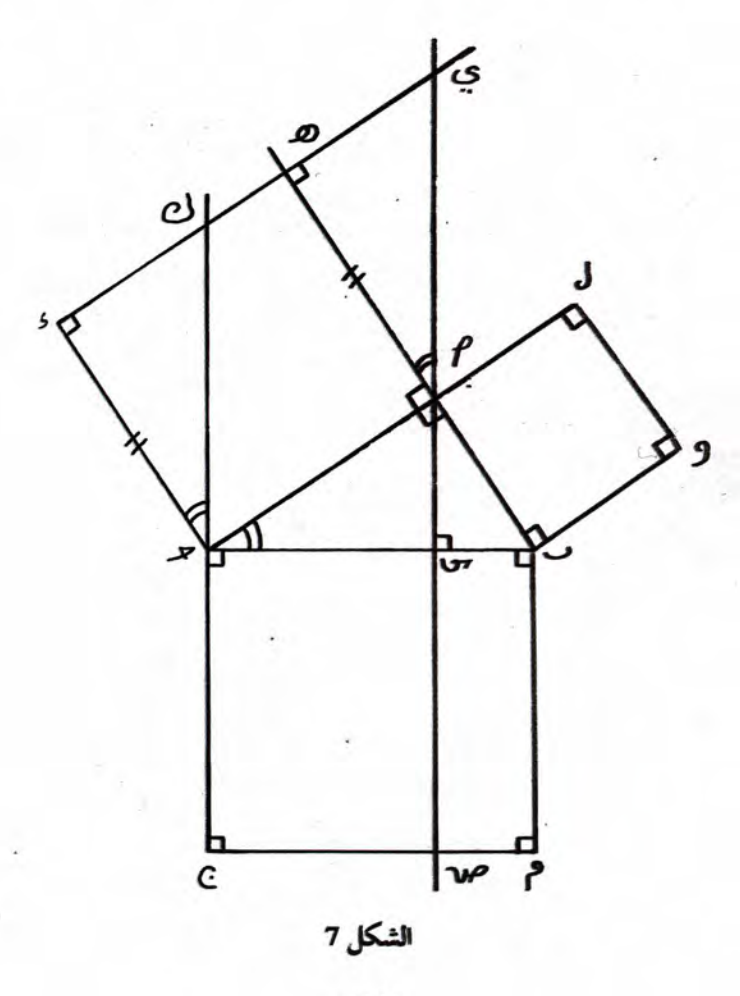
2) اب ح مثلث قائم في ا حيث اب = 6 ، اح = 8 .
[اه] عمود متعلق بالضلع [ب ح] .
أوجد كلاً من اه ، ه ب ، ه ح .

برهان آخر لنظرية فيثاغورث :

مسألة :

ا ب ح مثلث قائم في ا ، ننشىء على الوتر المربع ب ح ن م ، وعلى الضلع [ا ب] المربع ا ب و ل ، وعلى الضلع [ا ح] المربع ا ح ء ه .

ـ لتبرهن أن مساحة المربع ب ح ن م تساوي مجموع مساحتي المربعين ا ب و ل . ا ح ء ه .



الشكل 7

البرهان :

نرسم المستقيم (ﻫـ ح) الذي يقطع (ء ﻫ) في ك ، والمستقيم الذي يشمل ا ويعامد (ب ح) في س يقطع (م ﻫـ) و (ء ﻫ) في ص ، ي على الترتيب.

• المثلثان ا ح ب ، ء ح ك متقايسان لأن :

ا ح = ء ح (ا ح ء ﻫ مربع).

$\widehat{اح ب} = \widehat{ء ح ك}$ ([ح ا ، ح ب] و [ح ء ، ح ك] لهما نفس المتممة [ح ا ، ح ك])

$\widehat{ب ا ح} = \widehat{ح ء ك}$ = 1 قا

نستنتج أن ب ح = ح ك

لكن ح ب = ح ﻫـ .

إذن ح ﻫـ = ح ك .

• الرباعي ا ح ك ى متوازي أضلاع لأن :

(ح ك) // (ا ى) (عموديان على نفس المستقيم (ب ح)).

(ح ا) // (ك ي) لأنهما حاملا ضلعين متقابلين في مربع .

ومساحة متوازي الأضلاع ا ح ك ى تساوي ا ح × ا ﻫ .

لكن ا ح × ا ﻫ هي أيضا مساحة المربع ا ح ء ﻫ .

مساحة متوازي الأضلاع ا ح ك ى تساوي أيضًا ح ك × ح س

لكن ح ك × ح س = ح ﻫـ × ح س وهي مساحة المستطيل س ح ﻫـ ص .

نستنتج أن :

مساحة المربع ا ح ء ﻫ تساوي مساحة المستطيل س ح ﻫـ ص

• نبرهن ـ بنفس الطريقة ـ على أن مساحة المربع ا ب و ل تساوي مساحة المستطيل ب س ص م .

لكن مساحة المربع ب ح ﻫـ م تساوي مجموع مساحتي المستطيلين ب س ص م ، س ح ﻫـ ص .

نستنتج أن :

مساحة المربع ب حـ هـ م تساوي مجموع مساحتي المربعين ا ب و ل . ا حـ ى هـ .

أي $ب حـ^2 = ا ب^2 + ا حـ^2$

مساحة المربع المنشأ على وتر مثلث قائم تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين القائمين.

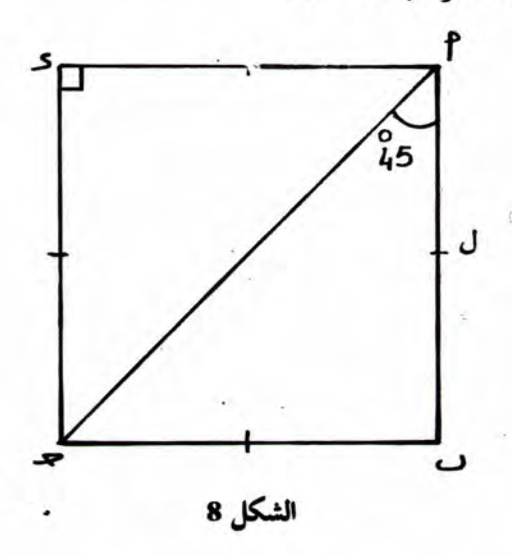
4 تطبيقات

1) طول قطر مربع :

مسألة :

ا ب حـ ى مربع طول ضلعه ل (الشكل 8)

لنحسب طول قطره بدلالة ل .



الشكل 8

الحل :

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم ا ب حـ نجد :

$ا حـ^2 = ا ب^2 + ب حـ^2$

لكن اب = بح = ل

إذن $\text{اح}^2 = \text{ل}^2 + \text{ل}^2 = 2\,\text{ل}^2$

أي **$\text{اح} = \text{ل}\sqrt{2}$**

طول قطر مربع يساوي جداء طول ضلع المربع والعدد $\sqrt{2}$

• **حالة خاصة :**

إذا كان ل = 1 فإن $\text{اح} = \sqrt{2}$ (الشكل 9)

الشكل 9

• **ملاحظة :**

في (الشكل 8) ، (اح) ينصف كلاًّ من الزاويتين [اب ، اد] ، [حب ، حد] .

إذن $\widehat{\text{باح}} = \widehat{\text{بحا}} = 45°$.

ولدينا $\text{تجب } 45° = \dfrac{\text{اب}}{\text{اح}} = \dfrac{\text{ل}}{\sqrt{2} \times \text{ل}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ولكن $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

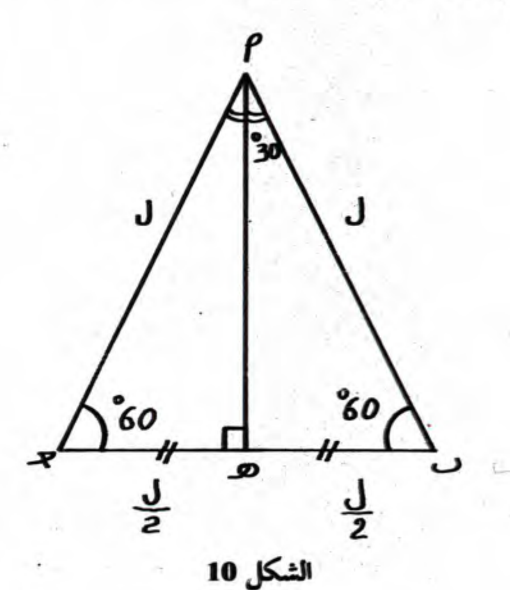
نستنتج أن $\text{تجب } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ا ب ح ء مربع طول ضلعه 6 سم ، احسب طول قطره .

2) ارتفاع مثلث متقايس الأضلاع :

مسألة :

ا ب ح مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه ل . (الشكل 10) .
لنحسب ارتفاعه بدلالة ل .



الشكل 10

الحل :

بما أن المثلث ا ب ح متقايس الأضلاع ، فالعمود (ا هـ) هو محور [ب ح] وهو منصف الزاوية [ا ب ، ا ح] (الشكل 10) .
فالمثلث ا ب هـ قائم الزاوية في هـ . $\widehat{ب} = 60°$ ، $\widehat{ب ا هـ} = 30°$.
وبتطبيق نظرية فيثاغورث يكون :

ا هـ^2 + ب هـ^2 = ا ب^2 .

ومنه $اهـ^2 = اب^2 - ب هـ^2$

لكن $ب هـ = \frac{1}{2} ب حـ = \frac{ل}{2}$.

إذن $اهـ^2 = ل^2 - \frac{ل^2}{4}$

أي $اهـ^2 = \frac{3}{4} ل^2$

ومنه $اهـ = ل \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

نستنتج أن :

ارتفاع مثلث متقايس الأضلاع يساوي جداء طول ضلعه والعدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ملاحظة 1 :

في الشكل 10 ، المثلث ا ب هـ قائم و $\hat{ب} = 60^o$ و $\widehat{ب ا هـ} = 30^o$.

إذن $تجب\ 60^o = \frac{ب هـ}{ا ب} = \frac{\frac{1}{2} ل}{ل} = \frac{1}{2}$

$تجب\ 30^o = \frac{ا هـ}{ا ب} = \frac{\frac{ل \times \sqrt{3}}{2}}{ل} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

أي $\text{تجب } 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{تجب } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ا ب حـ د معين حيث $\widehat{ا} = 60^\circ$. ا ب = 6 .
احسب طولي قطريه .

ملاحظة 2 :

في المثلث القائم ا ب هـ لدينا ما يلي :

• الضلع [ب هـ] مقابل للزاوية التي قيسها 30° و ب هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{2}$

والضلع [ا هـ] مجاور لهذه الزاوية حيث ا هـ = ا ب × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

وأيضًا ا هـ = ب هـ × $\sqrt{3}$

تستنتج ما يلي :

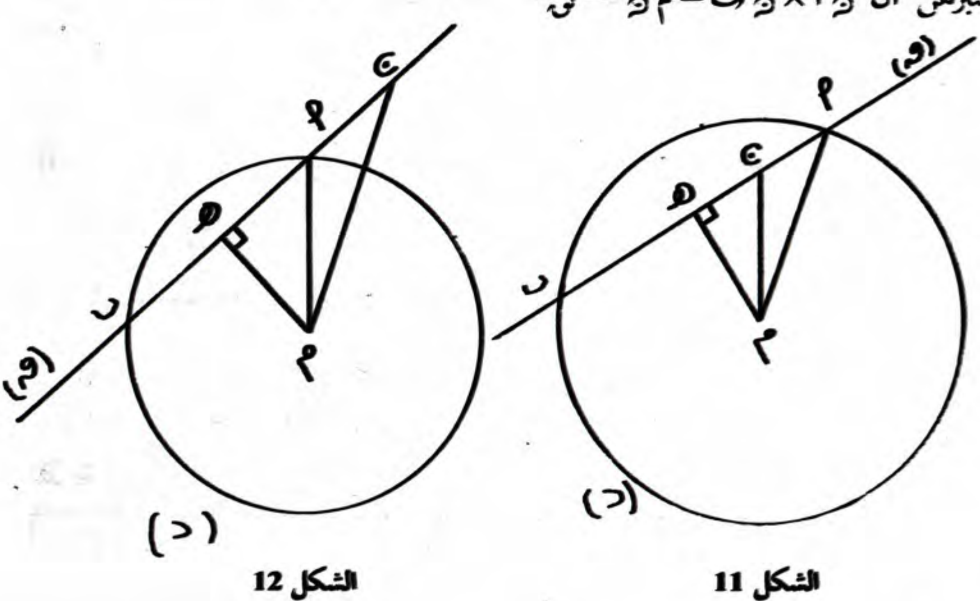
في مثلث قائم :
إذا كان قيس إحدى الزاويتين الحادتين هو 30° ، فإن :
• طول الضلع المقابل لهذه الزاوية يساوي نصف طول الوتر .
وطول الضلع المجاور لهذه الزاوية يساوي جداء طول الوتر والعدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
أو يساوي جداء طول الضلع المقابل لهذه الزاوية والعدد $\sqrt{3}$.

3) قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة :

مسألة 1 :

د(م ، نق) دائرة ، ن نقطة من المستوى ، (ق) مستقيم يشمل النقطة ن ويقطع (د) في النقطتين أ ، ب (الشكلان 11 ، 12)

لنبرهن أن $\overline{\text{ن أ}} \times \overline{\text{ن ب}} = \text{م ن}^2 - \text{نق}^2$



الشكل 12 الشكل 11

البرهان :

ـ نسمي هـ المسقط العمودي للنقطة م على (ق) ، فيكون (م هـ) هو محور القطعة [أ ب].

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على كل من المثلثين القائمين م هـ أ ، م هـ ن نجد :

$\text{م أ}^2 = \text{م هـ}^2 + \text{أ هـ}^2$ ...... (1)

$\text{م ن}^2 = \text{م هـ}^2 + \text{هـ ن}^2$ ...... (2)

ولدينا أيضا حسب علاقة شال :

$\overline{\text{ن أ}} = \overline{\text{ن هـ}} + \overline{\text{هـ أ}}$ ، $\overline{\text{ن ب}} = \overline{\text{ن هـ}} + \overline{\text{هـ ب}}$

وبما أن $\overline{هب} = -\overline{ها}$ فإن $\overline{نب} = \overline{نه} - \overline{ها}$

إذن $\overline{نا} \times \overline{نب} = (\overline{نه} + \overline{ها})(\overline{نه} - \overline{ها})$.

ومنه $\overline{نا} \times \overline{نب} = \overline{نه}^2 - \overline{ها}^2$

ونعلم أن $\overline{نه}^2 = نه^2$ ، $\overline{ها}^2 = ها^2$

نستنتج أن $\overline{نا} \times \overline{نب} = نه^2 - ها^2$.

ومن العلاقتين (1) ، (2) يكون :

$$ها^2 = ما^2 - مه^2 \text{ ، } نه^2 = من^2 - مه^2$$

$$\overline{نا} \times \overline{نب} = نه^2 - ها^2$$

$$\overline{نا} \times \overline{نب} = (من^2 - مه^2) - (ما^2 - مه^2)$$

$$\overline{نا} \times \overline{نب} = من^2 - مه^2 - ما^2 + مه^2$$

$$\overline{نا} \times \overline{نب} = من^2 - ما^2 .$$

ولكن $ما = ر$

إذن $\overline{نا} \times \overline{نب} = من^2 - ر^2$

نظرية :

> د (م ، ر) دائرة ، ن نقطة من المستوي .
> إذا كان (ق) مستقيماً يشمل ن ويقطع (د) في النقطتين ا ، ب فإن :
> $$\overline{نا} \times \overline{نب} = من^2 - ر^2$$

الجداء $\overline{نا} \times \overline{نب}$ يسمى قوة النقطة ن بالنسبة إلى الدائرة (د) .

ملاحظات :

- إذا كانت ن خارج الدائرة (د) فإن $من > ر$ أو $من^2 > ر^2$
نستنتج أن $من^2 - ر^2 > 0$ أي $\overline{نا} \times \overline{نب} > 0$.
- إذا كانت ن داخل الدائرة (د) فإن $\overline{نا} \times \overline{نب} < 0$.
- إذا كانت ن تنتمي إلى (د) فإن $\overline{نا} \times \overline{نب} = 0$.

خلاصة :

قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة تكون :

- **موجبة** إذا كانت هذه النقطة خارج الدائرة .
- **سالبة** إذا كانت هذه النقطة داخل الدائرة .
- **معدومة** إذا كانت هذه النقطة تنتمي إلى الدائرة .

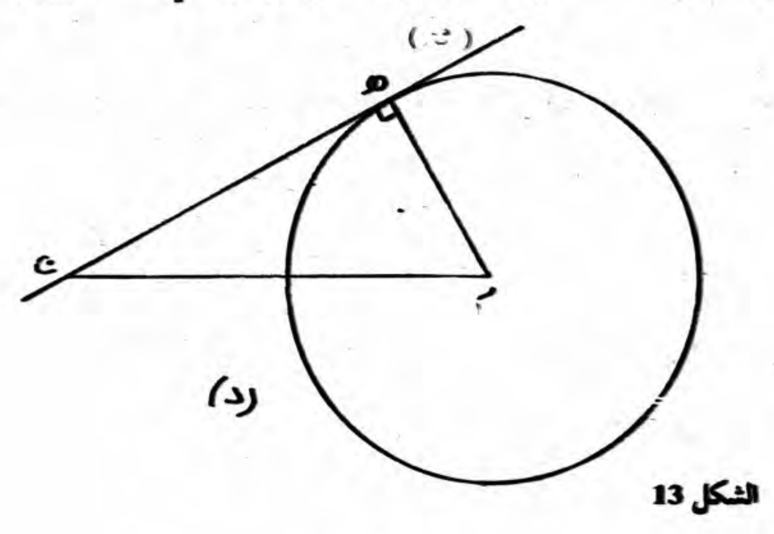
يمكن أن نبرهن على النظرية الآتية :

د (م ، ر) دائرة ، ن نقطة من المستوي .
إذا كان (ق) ، (ق') مستقيمين يشملان ن ويقطعان (د) في النقاط
ا ، ب و ا' ، ب' على الترتيب فإن :
$\overline{نا} \times \overline{نب} = \overline{نا'} \times \overline{نب'}$.

مسألة 2 :

د (م ، ر) دائرة ، ن نقطة خارج الدائرة (د) ، (ق) مستقيم يشمل ن ويمس (د) في النقطة هـ . (الشكل 13) .

ـ لنبرهن أن قوة النقطة ن بالنسبة إلى الدائرة (د) هي العدد $\overline{نم}^2 - ر^2$.



الشكل 13

البرهان :

نعلم أن قوة النقطة ج بالنسبة إلى الدائرة د (م ، ر) هي العدد $جم^2 - ر^2$.

بما أن (هـ ج) مماس فإن (م هـ) ⊥ (هـ ج) .

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم م هـ ج نجد أن :

$$م ج^2 = م هـ^2 + هـ ج^2$$

ومنه $م ج^2 - م هـ^2 = ج هـ^2$

وبما أن م هـ = ر فإن $م ج^2 - ر^2 = ج هـ^2$

نستنتج أن قوة النقطة ج بالنسبة إلى الدائرة د (م ، ر) هي العدد $ج هـ^2$.

نظرية :

> (د) دائرة و (ق) مماس لها في النقطة هـ .
> إذا كانت ج نقطة من (ق) فإن قوة ج بالنسبة إلى (د) تساوي $ج هـ^2$.

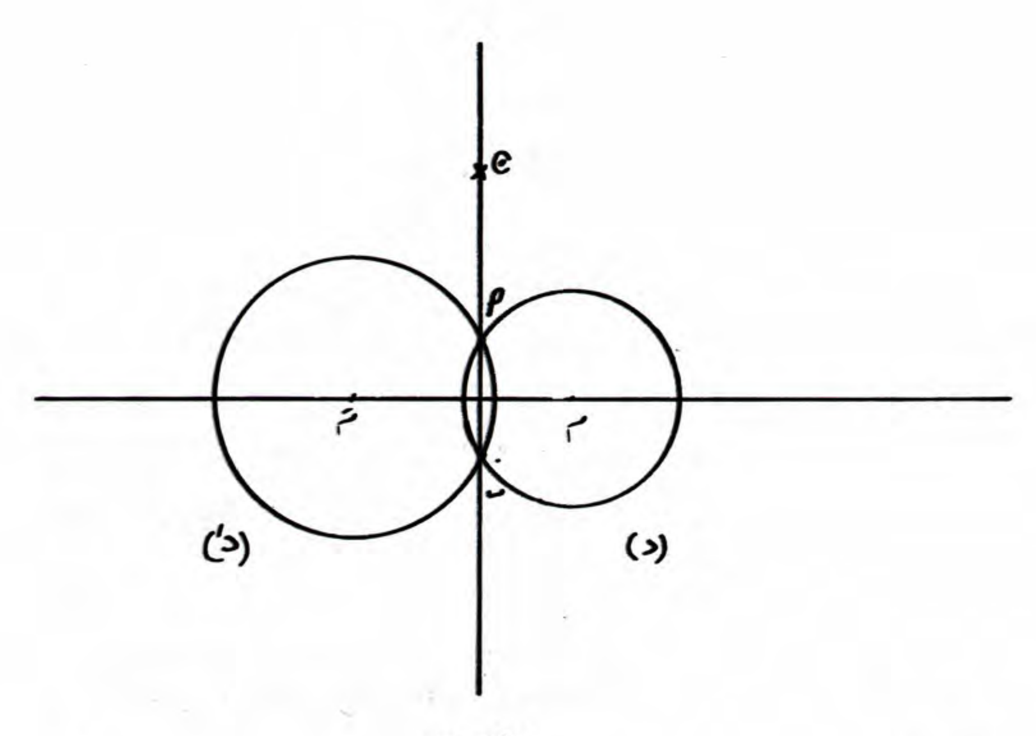
مسألة 3 :

د (م ، ر) ود(م′ ، ر′) دائرتان متقاطعتان في النقطتين أ ، ب (الشكل 14) .

لنبرهن ما يلي :

1) (أ ب) ⊥ (م م′)

2) إذا كانت ج نقطة من (أ ب) فإن قوتيها بالنسبة إلى كل من (د) و (د′) متساويتان .



الشكل 14

البرهان :

1) بما أن م ا = م ب فإن م تنتمي إلى محور [ا ب] وأيضًا مَ ا = مَ ب
إذن مَ تنتمي إلى محور [ا ب]
نستنتج أن (م مَ) هو محور [ا ب] .
أي أن (ا ب) ⊥ (م مَ) .

2) ه نقطة من المستقيم (ا ب) . قوتها بالنسبة إلى (د) تساوي $\overline{ها} \times \overline{هب}$. وأيضا قوتها بالنسبة إلى (دَ) تساوي $\overline{ها} \times \overline{هب}$.

نستنتج أن للنقطة ه نفس القوة بالنسبة إلى الدائرتين .

وبصفة عامة كل نقطة من المستقيم (ا ب) تكون متساوية القوة بالنسبة إلى الدائرتين (د) . (دَ) .

المستقيم (ا ب) يسمى **المحور الأساسي** للدائرتين (د) ، (دَ) .

تعريف :

المحور الأساسي لدائرتين غير متمركزتين هو مجموعة نقط المستوي المتساوية القوة بالنسبة إلى هاتين الدائرتين.

مسألة محلولة

وحدة الطول هي السنتمتر.

ا ب ح مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 4 ، ء هي نظيرة ا بالنسبة إلى ح.

1) برهن أن المثلث ا ب ء قائم في ب ثم احسب ب ء.

2) م منتصف [ب ح] ، المستقيم (ا م) والمستقيم (ق) العمودي على (ب ح) في ح يقطعان (ب ء) في النقطتين د ، هـ على الترتيب

- برهن أن القطع [ب د] ، [د هـ] ، [هـ ء] متقايسة ، ثم احسب الطول المشترك لها.

- احسب ا د

3) برهن أن كلاً من المثلثين ا د ء و ح هـ ء متساوي الساقين.

4) برهن أن المثلث د ح ء قائم في ح ، وأن الرباعي ا ب د ح دائري.

5) احسب قوة النقطة ء بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالراعي ا ب د ح ، ثم استنتج أن النقطة هـ لا تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب ح.

المعطيـات :

- ا ب = ا ح = ب ح = 4 . ح ∈ [ا ء] و ح ا = ح ء

- م منتصف [ب ح] ، (ح هـ) ⊥ (ب ح).

- (ا م) ∩ (ب ء) = {د} ، (ق) ∩ (ب ء) = {هـ}

المطلوب إثبات أن :

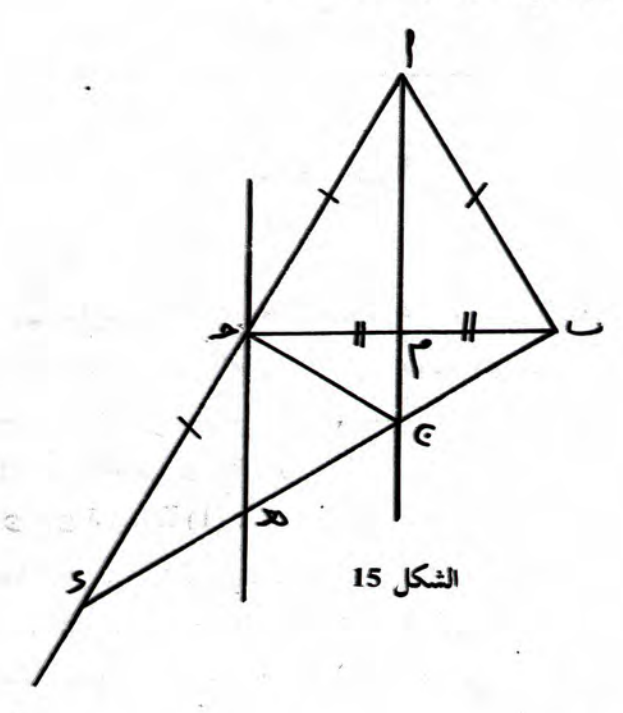
1) المثلث ا ب ء قائم في ب ثم حساب ب ء.

2) ب د = د هـ = هـ ء ثم حساب ا د.

3) كلاًّ من المثلثين ا ع د و حـ هـ د متساوي الساقين.

4) المثلث ع حـ د قائم و ا ب ع حـ رباعي دائري.

5) حساب قوة النقطة د بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي ا ب ع حـ. ثم استنتاج أن النقطة هـ تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب حـ.



الشكل 15

البرهان :

لدينا حسب المعطيات

ا ب = ب حـ = ا حـ

و ا حـ = حـ د

نستنتج أن ب حـ = ا حـ = حـ د

وهذا يعني أن $ب حـ = \frac{ا د}{2}$

إذن في المثلث ا ب د طول المتوسط [ب حـ] يساوي نصف طول الضلع المتعلق به.

فالمثلث ا ب د قائم في ب.

• وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ا ب د نجد :

ا ب^2 + ب د^2 = ا د^2 ومنه ب د^2 = ا د^2 − ا ب^2 .

لكن ا د = 2 ا ب أي ا د^2 = 4 ا ب^2 .

إذن ب د^2 = 4 ا ب^2 − ا ب^2

ويكون ب د^2 = 3 ا ب^2 أي ب د^2 = 3×4^2 .

نستنتج أن ب د = $4\sqrt{3}$

2) • بما أن المثلث ا ب جـ متقايس الأضلاع و م منتصف [ب جـ] فإن المتوسط (ا م) هو محور [ب جـ] . إذن (ا م) $\perp$ (ب جـ) .

ولدينا أيضًا حسب المعطيات (ب جـ) $\perp$ (جـ هـ) .

نستنتج أن (ا م) // (جـ هـ) .

• في المثلث ب جـ هـ ، المستقيم (م ن) يوازي (جـ هـ) ويشمل م منتصف [ب جـ] . فهو يشمل منتصف الضلع [ب هـ]

نستنتج أن ن هي منتصف [ب هـ] .

ومنه ب ن = ن هـ ...... (1) .

• في المثلث د ا ن ، المستقيم (جـ هـ) يوازي (ا ن) ويشمل جـ منتصف [ا د] . فهو يشمل منتصف الضلع [د ن] .

نستنتج أن النقطة هـ هي منتصف [ن د] .

ومنه ن هـ = هـ د ...... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن ب ن = ن هـ = هـ د .

فنقطع [ب ن] ، [ن هـ] ، [هـ د] متقايسة وطولها المشترك يساوي $\frac{\text{ب د}}{3}$ أي $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

• حساب ا ن :

في المثلث القائم ا ب ن لدينا حسب نظرية فيثاغورث :

ا ن^2 = ا ب^2 + ب ن^2 .

ا ن^2 = $4^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 16 + \frac{48}{9} = 16 + \frac{16}{3}$.

$ا ق^2 = \frac{64}{3}$ ومنه $ا ق = \frac{8}{\sqrt{3}}$ أي $ا ق = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

3) • لدينا $ق ى = 2 ق هـ = 2 \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

و $ا ق = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

نستنتج أن ق ى = ا ق وهذا يعني أن المثلث ا ق ى متساوي الساقين.

• في المثلث ا ق ى : ح ، هـ هما منتصفا الضلعين [ى ا] ، [ى ق] على الترتيب.

إذن $ح هـ = \frac{1}{2} ا ق$

أي $ح هـ = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

ونعلم أن $هـ ى = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

إذن ح هـ = هـ ى

فالمثلث ح هـ ى متساوي الساقين.

4) • في المثلث المتساوي الساقين ا ق ى : المتوسط (ق ح) هو أيضًا عمود له.

نستنتج أن (ق ح) $\perp$ (ا ى).

أي أن المثلث ق ح ى قائم في ح.

• لدينا في الرباعي ا ب ق ح :

$\widehat{ا ب ق} = 90^\circ$ (حسب الطلب الأول)

$\widehat{ا ح ق} = 90^\circ$ (لأن (ق ح) $\perp$ (ا ى))

إذن $\widehat{ا ب ق} + \widehat{ا ح ق} = 180^\circ$.

فالزاويتان المتقابلتان [ب ا ، ب ق] ، [ح ا ، ح ق] متكاملتان.

نستنتج أن الرباعي ا ب ق ح دائري.

5) • إن قوة النقطة د بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي أ ب و ح تساوي $\overline{\text{د ح}} \times \overline{\text{د أ}}$ وأيضًا $\overline{\text{د و}} \times \overline{\text{د ب}}$.

لنحسب مثلاً $\overline{\text{د ح}} \times \overline{\text{د أ}}$

لدينا $\overline{\text{د ح}} = \overline{\text{ح أ}} = 4$ و $\overline{\text{د أ}} = 2$ $\overline{\text{د ح}} = 8$ إذن $\overline{\text{د ح}} \times \overline{\text{د أ}} = 4 \times 8 = 32$.

لدينا $\overline{\text{د هـ}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ و $\overline{\text{د ب}} = 4\sqrt{3}$

إذن $\overline{\text{د هـ}} \times \overline{\text{د ب}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times 4\sqrt{3} = 16$

• الدائرة المحيطة بالرباعي أ ب و ح تشمل النقط أ . ب . ح فهي الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب ح .

إذا فرضنا أن هـ هي نقطة من الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب ح فإن : $\overline{\text{د هـ}} \times \overline{\text{د ب}} = \overline{\text{د ح}} \times \overline{\text{د أ}}$

لكن $\overline{\text{د ح}} \times \overline{\text{د أ}} = \overline{\text{د و}} \times \overline{\text{د ب}}$ (قوة النقطة د بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي أ ب و ح)

إذن $\overline{\text{د هـ}} \times \overline{\text{د ب}} = \overline{\text{د و}} \times \overline{\text{د ب}}$

وبما أن $\overline{\text{د ب}} \neq 0$ فإن $\overline{\text{د هـ}} = \overline{\text{د و}}$ وهذا يعني أن النقطتين هـ . و متطابقان . وهذا مستحيل حسب المعطيات .

إذن النقطة هـ لا تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب ح .

تمارين

وحدة الطول هي السنتمتر

1. اب ح مثلث قائم في ا حيث اب = 6 ، اح = 8

ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) .

ـ احسب ب ح ، اه ، ب ه ، ح ه .

2. اب ح مثلث قائم في ا حيث اب = 3 ، ب ح = 5 .

ع هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) .

ـ احسب اح ، اع ، ب ع ، ح ع .

3. اب ح مثلث حيث اب = $2\sqrt{13}$ ، اح = $4\sqrt{3}$ ، ب ح = 10 .

1) بيّن أن المثلث اب ح قائم في ا .

2) ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) .

ـ احسب ب ه ، ح ه ، اه .

(ش.ت.أ لسنة 1981)

4. اب ح ء رباعي حيث (اح) و (ب ء) متعامدان .

بيّن أن اب^2 + ح ء^2 = اء^2 + ب ح^2 .

5. اب ح مثلث ، ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) حيث اب = 6 ، ب ح = 9 ، ب ه = 4 .

ـ بيّن أن المثلث اب ح قائم في ا .

6. اب ح مثلث قائم في ا ، ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) ؛ ا′ ، ب′ ، ح′ منتصفات الأضلاع [ب ح] ، [ح ا] ، [اب] على التوالي .

ـ احسب ب ح ، اح ، اا′ ، ب ب′ ، ح ح′ ، اه علمًا بأن اب = 30 ، ب ه = 18 .

7. [اب] قطعة مستقيمة طولها 2 ط (حيث ط عدد موجب معلوم)
(ق) و (ق') مستقيمان عموديان على (اب) في ا ، ب على الترتيب ،
حـ نقطة من (ق) بحيث احـ $= \frac{1}{2}$ اب .
المستقيم الذي يشمل ا ويعامد (بحـ) في النقطة هـ يقطع (ق') في النقطة ء .
احسب بدلالة ط كلاً من :
1) بحـ ، به‍ ، حـه‍ ، اه‍ .
2) اء ، ءه‍ ، بء ، حـء .

8. [اب] قطعة مستقيمة طولها 10 ، (ق) مستقيم يعامد (اب) في ا ، (ك) مستقيم يعامد (اب) في ب ؛ حـ نقطة من (ق) بحيث احـ = 8 ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة ا على (بحـ) ، المستقيم (اه‍) يقطع (ك) في ء .
1) احسب بحـ ، اه‍ ، حـه‍ .
2) احسب اء ، بء ، حـء .

9. ابحـ مثلث حيث اب $= 2\sqrt{3}$ ، احـ $= 2\sqrt{5}$ ، بحـ $= 4\sqrt{2}$
1) بيّن أن المثلث ابحـ قائم في ا .
2) هـ هي المسقط العمودي للنقطة ا على (بحـ) ، ء هي المسقط العمودي للنقطة هـ على (احـ) .
ـ بيّن أن النسبتين $\frac{\text{ءه‍}}{\text{اب}}$ ، $\frac{\text{حـه‍}}{\text{حـب}}$ متساويتان .
ـ احسب القيمة المشتركة لهما .

10. (د) دائرة مركزها م وقطرها [اب] حيث اب = 10 ،
[احـ] وتر طوله 8 ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة حـ على (اب) .
1) احسب بحـ ، حـه‍ .
2) المماس للدائرة في حـ يقطع (اب) في النقطة ء .
احسب كلاً من مه‍ ، مء ، ءحـ .

11. [اب] قطعة مستقيمة طولها 8 ؛ (د) دائرة قطرها [اب] ومركزها م . هـ ∈ [اب] بحيث اهـ = 2 ؛ المستقيم العمودي على (اب) في النقطة هـ يقطع الدائرة (د) في حـ ، ء .

1) ما نوع المثلث احـم؟
2) بيّن أن الرباعي احـمء معين.
3) ما نوع المثلث احـب؟
4) احسب احـ ، حـهـ ، حـب .

(ش.ت.م 83)

12. ابحـ مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي ا ، حيث بحـ = 8 ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة ا على (بحـ) حيث اهـ = 5 . (د) هي الدائرة المحيطة بهذا المثلث ، المستقيم (اهـ) يقطع الدائرة (د) ثانية في ا′ .

1) برهن أن المستقيم (اا′) هو مستقيم قطري للدائرة (د) ؛ ما نوع المثلث ابا′؟
2) احسب اب ، احـ ثم نصف قطر الدائرة (د) .

13. ابحـء شبه منحرف قائم في ا و ء حيث اب = اء و ءبحـ = 90° .

1) برهن أن المثلث ءبحـ متساوي الساقين.
2) نضع اب = ط احسب بدلالة ط كلاً من بحـ ، حـء ، احـ ، بء .
3) نضع [احـ] ∩ [بء] = { هـ } . احسب بدلالة ط كلاً من هـا ، هـحـ ، هـب ، هـء .
4) ل هي المسقط العمودي للنقطة ء على (احـ) .
احسب بدلالة ط : ال ، حـل .

14. د (م ، نق) ، د′ (م′ ، نق′) دائرتان متماستان خارجيًا في النقطة ب ، (ق) مماس مشترك لهما في النقطتين ا ، ا′ والمماس المشترك لهما في النقطة ب يقطع (ق) في حـ

1) برهن أن حـا = حـب = حـا′ ، واستنتج أن المثلث ابا′ قائم في ب
2) برهن أن المثلث محـم′ قائم في حـ .
3) احسب بدلالة نق ، نق′ كلاً من الأطوال حـب ، حـم ، حـم′

4) بيّن أن $ff'^2 = 4\,\text{ى}'\,.\,\text{تق}'$

5) بيّن أنه إذا كان $\text{ى}' = \text{ى}$ فإن $\text{حم} = \text{حم}' = \sqrt{2}\,\text{ى}$.

15. ابح مثلث قائم في ا ، $[\text{اد}]$ عمود له . ه ، ك هما المسقطان العموديان للنقطة د على (اب) و (اح) على الترتيب .

1) برهن أن $\text{دب}^2 + \text{دح}^2 = \text{بح}^2 - 2\,\text{اد}^2$ و $\text{ده}^2 + \text{دك}^2 = \text{اد}^2$.

2) استنتج أن $\text{به}^2 + \text{حك}^2 + 3\,\text{اد}^2 = \text{بح}^2$.

16. ابح مثلث قائم في ا ، ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على (بح) .

1) بيّن أن $\dfrac{\text{اب}^2}{\text{اح}^2} = \dfrac{\text{به}}{\text{هح}}$.

2) بيّن أن $\text{اب}^2 \times \text{اح}^2 = \text{اه}^2 \times \text{بح}^2$.

3) استنتج أن $\dfrac{1}{\text{اب}^2} + \dfrac{1}{\text{اح}^2} = \dfrac{1}{\text{اه}^2}$.

17. ابح مثلث $[\text{اه}]$ عمود متعلق بالضلع $[\text{بح}]$ م منتصف $[\text{بح}]$

1) برهن أن $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{ام}}^2 + \overline{\text{به}}^2 - \overline{\text{هم}}^2$

وأن $\overline{\text{اح}}^2 = \overline{\text{ما}}^2 + \overline{\text{حه}}^2 - \overline{\text{هم}}^2$.

2) نضع $\overline{\text{به}} = \overline{\text{بم}} + \overline{\text{مه}}$ و $\overline{\text{حه}} = \overline{\text{حم}} + \overline{\text{مه}}$.

استنتج من السؤال 1) أن :

$\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{ام}}^2 + \overline{\text{بم}}^2 + 2\,\overline{\text{بم}} \times \overline{\text{مه}}$ وأن $\overline{\text{اح}}^2 = \overline{\text{ام}}^2 + \overline{\text{حم}}^2 + 2\,\overline{\text{حم}} \times \overline{\text{مه}}$.

3) استنتج أن : $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اح}}^2 = 2\,\overline{\text{ام}}^2 + 2\,\overline{\text{مب}}^2$

وأن · $\overline{\text{اب}}^2 - \overline{\text{اح}}^2 = 2\,\overline{\text{بح}} \times \overline{\text{مه}}$.

18. ابح مثلث حيث $\widehat{\text{ب}} = 120^\circ$ ، $\widehat{\text{ح}} = 45^\circ$ ، $[\text{اه}]$ عمود متعلق بالضلع $[\text{بح}]$ ، ط ، ل هما طولا الضلعين $[\text{حا}]$ ، $[\text{اب}]$ على الترتيب .

1) احسب بدلالة ل طول كل من $[\text{به}]$ ، $[\text{اه}]$.

2) ما نوع المثلث اهح؟ استنتج علاقة بين ط و ل .

19. ا ب حـ ء شبه منحرف قائم في ا و ء حيث ا ب̂ ء = 60° ،
حـ ب̂ ء = 90° و ا ب = ط (ط عدد حقيقي موجب) .
احسب بدلالة ط طول القطر [ء ب] وطول كل من أضلاع شبه المنحرف .
واحسب كذلك القطر [ا حـ] .

20. ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث ا ب = 6 ؛ ا حـ = 8 (وحدة الطول هي السنتمتر) .
1) احسب طول الضلع [ب حـ] .
2) ء نقطة من المستوى بحيث الرباعي ا ب حـ ء متوازي أضلاع ، ﻫ منتصف القطعة [ا حـ] ؛ المستقيم الذي يشمل النقطة ﻫ ويوازي (ا ب) يقطع الضلع [ب حـ] في هـ .
ـ احسب محيط متوازي الأضلاع ا ب حـ ء .
ـ احسب طول القطعة [ﻫ هـ] .
3) احسب طول القطر [ب ء] لمتوازي الأضلاع ا ب حـ ء .
(من ش.ت.م 1983)

21. [ا ب] قطعة مستقيمة طولها 8 (وحدة الطول هي السنتمتر)
(د) هي الدائرة التي قطرها [ا ب] ومركزها م ؛ هـ نقطة من [ا ب] بحيث ا هـ = 2 .
المستقيم العمودي على (ا ب) في هـ يقطع الدائرة (د) في النقطتين ﻫ ، ﻫ' .
1) قارن بين ا ﻫ و م ﻫ ما هو طول القطعة [ا ﻫ] ؟
2) بيّن أن الرباعي ا ﻫ م ﻫ' هو معين .
3) احسب طول القطعة [هـ ﻫ] .
4) بيّن أن هـ ﻫ^2 = هـ ا × هـ ب
(من ش.ت.م 1983)

22. د (م ، 5) دائرة ، ﻫ نقطة من المستوي بحيث م ﻫ = 7 .
(ق) مستقيم يشمل ﻫ ويقطع (د) في النقطتين ا ، ب بحيث تكون النقطة ا منتصف [ﻫ ب] . احسب طول الوتر [ا ب] .

23. د (م ، 4,5) دائرة ، ﻫ نقطة من المستوي بحيث م ﻫ = 3,5 .

1) [ا ب] وتر يشمل ﻫ بحيث ﻫ ا = 3 ﻫ ب ، احسب ا ب .
2) احسب المسافة بين مركز الدائرة والوتر [ا ب] .

24. د (م ، 6) دائرة ، ا نقطة من المستوي بحيث م ا = 2 ، الدائرة ه (ا ، 5) تقطع الدائرة (د) في النقطتين ب ، ب′ ، والمستقيمان (ا ب) ، (ا ب′) يقطعان (د) في النقطتين ح ، ح′ على الترتيب .

1) برهن على تقايس الوترين [ب ح] ، [ب′ ح′] من الدائرة (د) .
2) احسب الطول المشترك لهذين الوترين .
3) المستقيم العمودي على (م ا) في م يقطع الدائرة (د) في النقطتين ﻫ و ﻫ′ ، ويقطع الدائرة (ه) في النقطتين ه ، ه′ .
بيّن أن للمثلثين ا ه ﻫ ، ا ه′ ﻫ′ نفس المساحة ثم احسب هذه المساحة .

25. د (م ، ر) دائرة ، [ا ب] قطر لها . (س س′) مماس لها في النقطة ب . النقطة ح هي منتصف [م ب] .

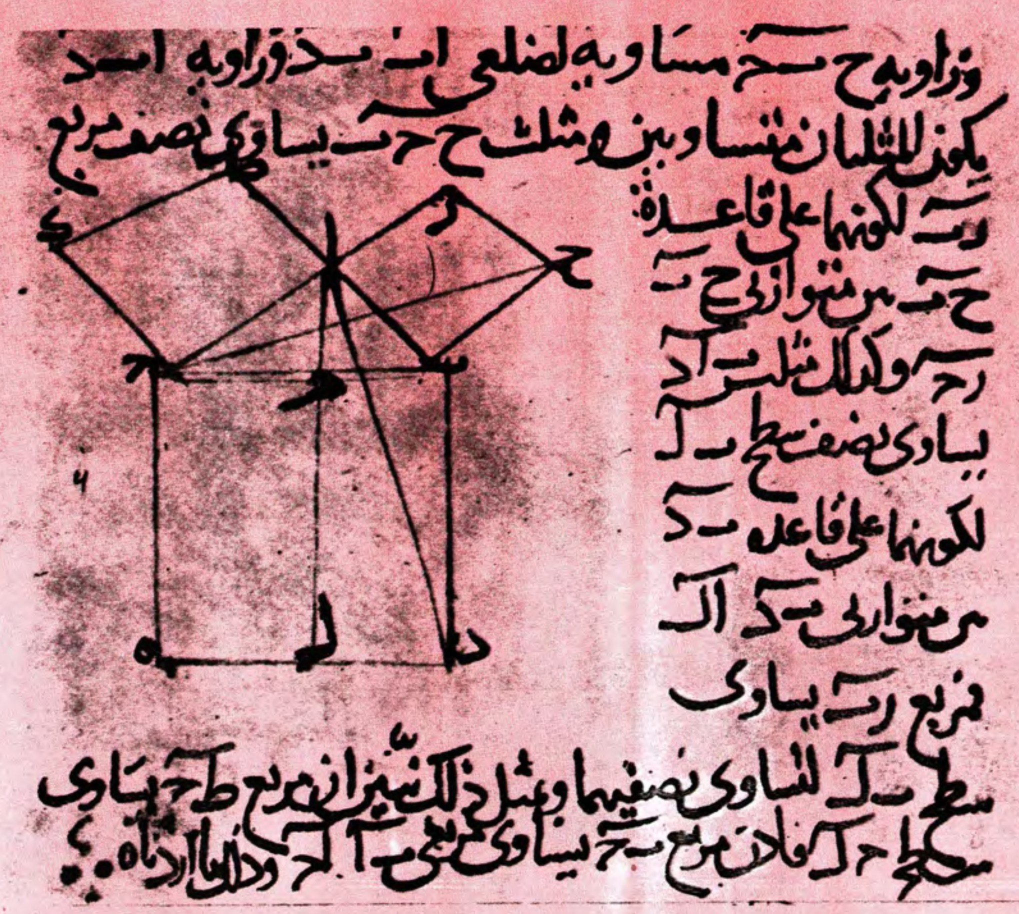
1) ك نقطة من (ا ب) بحيث ك ∉ [ب ا ؛ ا ك × ا ح = 4 ر^2
احسب ا ك بدلالة ر .
2) ل نقطة من [ب س و ل′ نظيرة ل بالنسبة إلى (ا ب) ، (ا ل) و (ا ل′) يقطعان (د) في النقطتين ﻫ ، ﻫ′ .
برهن أن ا ﻫ × ا ل = ا ﻫ′ × ا ل′ = 4 ر^2 . استنتج أن (ﻫ ﻫ′) // (ل ل′) .
3) برهن أن الرباعي ﻫ ﻫ′ ل′ ل دائري .
4) ء نقطة من (د) بحيث (ح ء) ⊥ (ا ب) .
احسب ح ء بدلالة ر .

فيثاغورث

فيلسوف ورياضي إغريقي من القرن السادس قبل الميلاد ولد بجزيرة ساموس ، في بحر إيجة وقد سافر كثيرًا وخاصة إلى مصر وفارس والهند . أسس مدرسة اشتهرت بالمدرسة الفيثاغورية .

اقترن اسمه بالعلاقة المترية الآتية :

"مساحة المربع المنشأ على وتر مثلث قائم تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين القائمين". مع أنها عرفت قبله في كل من مصر والصين. وقد استعمل العرب هذه العلاقة المترية ، والصفحة الآتية تبيّن ذلك .


وزاويه ح ب ح مساويه لضلعي اب بد وزاويه ا ب د
يكون المثلثان متساويين ومثلث ح ب ح يساوي نصف مربع
ب ح لكونهما على قاعدة
ح ب بين متوازيي ح ب
رح وكذلك مثلث ا د
يساوي نصف سطح ب ك
لكونهما على قاعدة ب د
بين متوازيي ب د ا ك
فمربع ر ب يساوي
سطح ب ك لتساوي نصفيهما وبمثل ذلك تبين ان مربع ط ح يساوي
سطح ح ك فاذن مربع ب ح يساوي مربعي ب ا ا ح وذلك ما اردناه

حساب المثلثات

• حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات ، ويبحث في العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وأقياس زواياه ، والتعبير عن هذه العلاقات في شكل معادلات يمكن ـ بحلها ـ إيجاد الأطوال وأقياس الزوايا .

• ويدخل علم المثلثات في ميادين شتى كالهندسة البحرية والمدنية وفي الفلك والفيزياء ، وبدون هذا العلم تصبح هذه العلوم أكثر تعقيدًا .

• ويعتمد علم المثلثات على أربع نسب مثلثية أساسية هي :
« الجيب » و « جيب التمام » و « الظل » و « ظل التمام » .

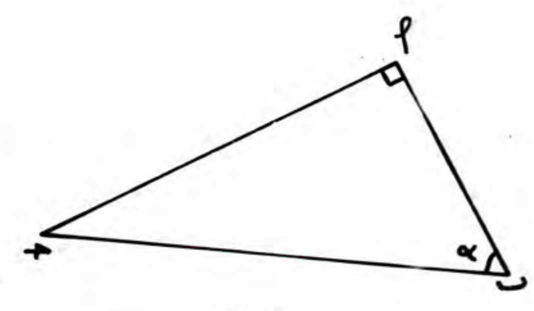
أول من استخدم النسبة « جيب زاوية » هم الهنود ، أما النسب المثلثية الأخرى فقد عرفت لأول مرة في تاريخ هذا العلم على يد علماء مسلمين أمثال : أبو الوفاء البوزجاني ونصر الدين الطوسي والبتاني ، وبذلك وضع هؤلاء العلماء أسس هذا العلم ، ثم انتقل منهم عن طريق الأندلس إلى أيدي علماء الرياضيات في أوروبا .
• وهكذا ظل هذا العلم يتطور حتي أصبح في وقتنا الحاضر شاملاً لمعظم العلوم فصار لا غنى عنه في جميع الأبحاث والميادين العلمية .

13 مفاهيم أولية في حساب المثلثات

1. النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم :

تعرّفنا سابقًا على جيب تمام زاوية حادة كنسبة ثابتة تتعلق بقيس هذه الزاوية . وبصفة خاصة : جيب تمام زاوية حادة قيسها α في مثلث قائم ا ب حـ وتره [ب حـ] يساوي نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الوتر (الشكل 1)

أي : $\text{تجب}\ \alpha = \dfrac{\text{اب}}{\text{ب حـ}}$.



الشكل 1

هذه النسبة تسمى **نسبة مثلثية** للزاوية الحادة التي قيسها α .

• توجد نسب أخرى تتعلق بهذه الزاوية وهي :

$\dfrac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}}$ ، $\dfrac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}}$ ، $\dfrac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ وتسمى أيضًا نسبًا مثلثية .

ـ النسبة $\dfrac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}}$ تسمى **جيب الزاوية** التي قيسها α

ونكتب : $\text{جب}\ \alpha = \dfrac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}}$.

ـ النسبة $\frac{\text{اح}}{\text{اب}}$ تسمى **ظل الزاوية** التي قيسها α .

ونكتب : $\text{ظل}\ \alpha = \frac{\text{اح}}{\text{اب}}$.

ـ النسبة $\frac{\text{اب}}{\text{اح}}$ تسمى **ظل تمام** الزاوية التي قيسها α .

ونكتب : $\text{تظل}\ \alpha = \frac{\text{اب}}{\text{اح}}$.

خلاصة :

إذا كان α هو قيس زاوية حادة في مثلث قائم فإن :

$$\text{جب}\ \alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\text{تجب}\ \alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\text{ظل}\ \alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

$$\text{تظل}\ \alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$$

ملاحظة :

إذا كان طول وتر المثلث القائم ابح هو وحدة الطول

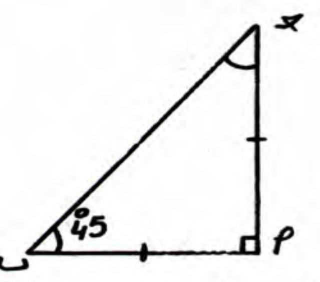
أي بح = 1 فإن :

$\text{جب}\ \alpha = \frac{\text{اح}}{\text{بح}} = \text{اح}$ و $\text{تجب}\ \alpha = \frac{\text{اب}}{\text{بح}} = \text{اب}$.

2. النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

1) النسب المثلثية للزاوية التي قيسها 45^{o} :

ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث $\widehat{ب} = \widehat{حـ} = 45^{o}$



الشكل 2

نستنتج من ذلك أن ا ب = ا حـ .

وحسب نظرية فيثاغورث يكون :

ب حـ = $\sqrt{2}$ × ا ب أي ب حـ = ا ب × $\sqrt{2}$.

نستنتج أن جب 45^{o} = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

وأن تجب 45^{o} = $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نتيجة | جب 45^{o} = تجب 45^{o} = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

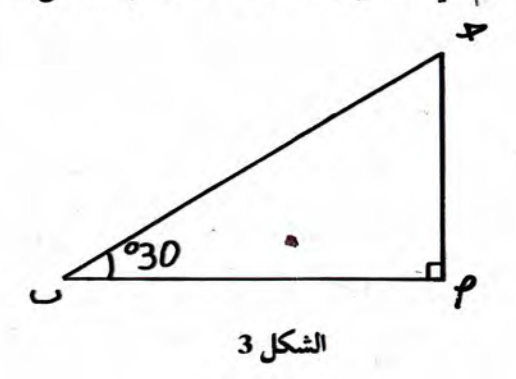
ظل 45^{o} = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} = 1$.

تظل 45^{o} = $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} = 1$.

نتيجة | ظل 45^{o} = تظل 45^{o} = 1

2) النسب المثلثية للزاويتين اللتين قيساهما 30° ، 60° :

ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث $\hat{ب} = 30^\circ$. (الشكل 3)



الشكل 3

نستنتج أن $\hat{حـ} = 60^\circ$.

حسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$$ا حـ = \frac{1}{2} ب حـ \quad و \quad ا ب = ا حـ \times \sqrt{3}$$

إذن $ا ب = \left(\frac{1}{2} ب حـ \right) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times ب حـ$

$$جب\ 30^\circ = \frac{ا حـ}{ب حـ} = \frac{\frac{1}{2} ب حـ}{ب حـ} = \frac{1}{2}$$

$$و\ تجب\ 60^\circ = \frac{ا حـ}{ب حـ} = \frac{\frac{1}{2} ب حـ}{ب حـ} = \frac{1}{2}$$

نتيجة : $جب\ 30^\circ = تجب\ 60^\circ = \frac{1}{2}$

• جب $60^\circ = \frac{\text{اب}}{\text{بح}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{بح}}{\text{بح}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تجب $30^\circ = \frac{\text{اب}}{\text{بح}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{بح}}{\text{بح}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

نتيجة : جب 60° = تجب $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• ظل $60^\circ = \frac{\text{اب}}{\text{اح}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{بح}}{\frac{1}{2} \times \text{بح}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$.

تظل $30^\circ = \frac{\text{اب}}{\text{اح}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{بح}}{\frac{1}{2} \times \text{بح}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$.

نتيجة : ظل 60° = تظل $30^\circ = \sqrt{3}$

• ظل $30^\circ = \frac{\text{اح}}{\text{اب}} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{بح}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{بح}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

• تظل $60^\circ = \frac{اح}{اب} = \frac{\frac{1}{2} \times بح}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times بح} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

نتيجة : | ظل 30° = تظل $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |

3) النسب المثلثية للزاويتين المعدومة والقائمة :

• رأيت أن تجب $0^\circ = 1$ وأن تجب $90^\circ = 0$.

• نقبل ما يلي : جب $0^\circ = 0$ و جب $90^\circ = 1$.

• ظل $0^\circ = 0$

• ظل 90° غير موجود .

• تظل $90^\circ = 0$

• تظل 0° غير موجود .

نتائج :

جب 0° = تجب $90^\circ = 0$
جب 90° = تجب $0^\circ = 1$

ظل 0° = تظل $90^\circ = 0$
ظل 90° و تظل 0° غير موجودين .

ملاحظة :

• رأيت أنه :

إذا كان $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ فإن تجب $\alpha \in [0 ، 1]$

وأيضا :

إذا كان $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ فإن جب $\alpha \in [0 ، 1]$

نقبل أنه : إذا كان $0^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ$ فإن ظل $\alpha \in [0 ، +\infty[$

نلخص النتائج السابقة في الجدول الآتي :

النسب المثلثية / الأقياس بالدرجات	الجيب	جيب التمام	الظل	ظل التمام
0°	0	1	0	غير موجود
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	غير موجود	0

3. العلاقة بين النسب المثلثية لزاويتين متتامتين :

ا ب جـ مثلث قائم في ا (الشكل 4)

الشكل 4

لدينا $\hat{ا} = 90°$ إذن $\hat{ب} + \hat{جـ} = 90°$

لدينا جب $\hat{جـ} = \frac{ا ب}{ب جـ}$

و تجب $\hat{ب} = \frac{ا ب}{ب جـ}$

نستنتج أن **جب $\hat{جـ}$ = تجب $\hat{ب}$**

وأيضًا ظل $\hat{ب} = \frac{ا جـ}{ا ب}$

و تظل $\hat{جـ} = \frac{ا جـ}{ا ب}$

نستنتج أن **ظل $\hat{ب}$ = تظل $\hat{جـ}$**

إذا كان $\hat{ب} + \hat{جـ} = 90°$ فإن جب $\hat{جـ}$ = تجب $\hat{ب}$ و ظل $\hat{ب}$ = تظل $\hat{جـ}$
أي جب $\hat{جـ}$ = تجب $(90° - \hat{جـ})$ و ظل $\hat{ب}$ = تظل $(90° - \hat{ب})$

في مثلث قائم :
- جيب زاوية حادة يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها .
- ظل زاوية حادة يساوي ظل تمام الزاوية المتممة لها .

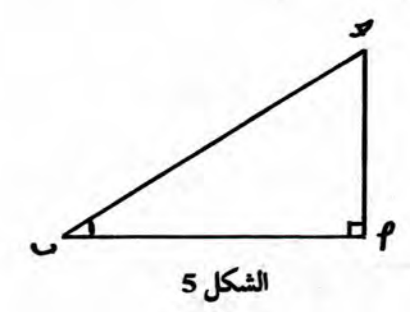
رأيت مثلاً أن جب 30^{0} = تجب 60^{0} وأن ظل 30^{0} = تظل 60^{0} .

4. العلاقات بين النسب المثلثية لزاوية حادة :

ا ب ح مثلث قائم في ا ، (الشكل 5)
نعلم أن :

$$\text{جب } \hat{\text{ب}} = \frac{\text{اح}}{\text{بح}}$$

$$\text{و تجب } \hat{\text{ب}} = \frac{\text{اب}}{\text{بح}} .$$



الشكل 5

لاحظ أن $\hat{\text{ب}} \neq 90^{0}$ إذن تجب $\hat{\text{ب}} \neq 0$.

$$\text{فيكون } \frac{\text{جب } \hat{\text{ب}}}{\text{تجب } \hat{\text{ب}}} = \frac{\text{اح}}{\text{بح}} \div \frac{\text{اب}}{\text{بح}} = \frac{\text{اح}}{\text{بح}} \times \frac{\text{بح}}{\text{اب}} = \frac{\text{اح}}{\text{اب}} = \text{ظل } \hat{\text{ب}} .$$

$$\text{أي } \boxed{\frac{\text{جب } \hat{\text{ب}}}{\text{تجب } \hat{\text{ب}}} = \text{ظل } \hat{\text{ب}}}$$

ملاحظة : $\text{ظل } 0^{0} = \frac{\text{جب } 0^{0}}{\text{تجب } 0^{0}} = \frac{0}{1} = 0$

- ولدينا حسب نظرية فيثاغورث :

$$\text{اح}^2 + \text{اب}^2 = \text{بح}^2 \text{ ومنه } \frac{\text{اح}^2 + \text{اب}^2}{\text{بح}^2} = \frac{\text{بح}^2}{\text{بح}^2} = 1$$

أو $\frac{\text{أح}^2}{\text{بح}^2} + \frac{\text{أب}^2}{\text{بح}^2} = 1$ أي $\left(\frac{\text{أح}}{\text{بح}}\right)^2 + \left(\frac{\text{أب}}{\text{بح}}\right)^2 = 1$

وهذا يعني أن : $(\text{جب}\ \hat{\text{ه}})^2 + (\text{تجب}\ \hat{\text{ه}})^2 = 1$

نكتب $(\text{جب}\ \hat{\text{ه}})^2 = \text{جب}^2\ \hat{\text{ه}}$ و $(\text{تجب}\ \hat{\text{ه}})^2 = \text{تجب}^2\ \hat{\text{ه}}$.

فيكون : $\boxed{\text{جب}^2\ \hat{\text{ه}} + \text{تجب}^2\ \hat{\text{ه}} = 1}$

• ولدينا ظل ب $= \frac{\text{أح}}{\text{أب}}$ و تظل $\hat{\text{ه}} = \frac{\text{أب}}{\text{أح}}$

نستنتج أن تظل $\hat{\text{ه}} = \frac{1}{\text{ظل}\ \hat{\text{ه}}}$ وبما أن ظل $\hat{\text{ه}} = \frac{\text{جب}\ \hat{\text{ه}}}{\text{تجب}\ \hat{\text{ه}}}$

فإن $\boxed{\text{تظل}\ \hat{\text{ه}} = \frac{\text{تجب}\ \hat{\text{ه}}}{\text{جب}\ \hat{\text{ه}}}}$

ملاحظة : تظل $90° = \frac{\text{تجب}\ 90°}{\text{جب}\ 90°} = \frac{0}{1} = 0$

5. استعمال الجداول المثلثية :

رأيت في الفقرة 2 . جدولاً للنسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة . وسنجد في نهاية الكتاب جدولين خاصين بالنسب المثلثية للزوايا التي أقياسها محصورة بين $0°$ و $90°$ أو بين 0 غر و 100 غر ، هذه النسب معطاة بقيم مقربة إلى $\frac{1}{10^4}$ بالنقصان .

أمثلة :

1) جب $37° = 0{,}6018$ ؛ تجب 27 غر $= 0{,}4115$ ؛ ظل $49° = 1{,}1504$

2) العدد 0,8746 هو تجب 29° أو جب 61° .
العدد 0,9004 هو ظل 42° أو تظل 48° .
العدد 0,2639 هو جب 17 غر أو تجب 83 غر .

ملاحظة 1 :

نكتفي في هذه السنة بحساب النسب المثلثية لزوايا حادة أقياسها بالدرجات أو بالغراد هي أعداد طبيعية .

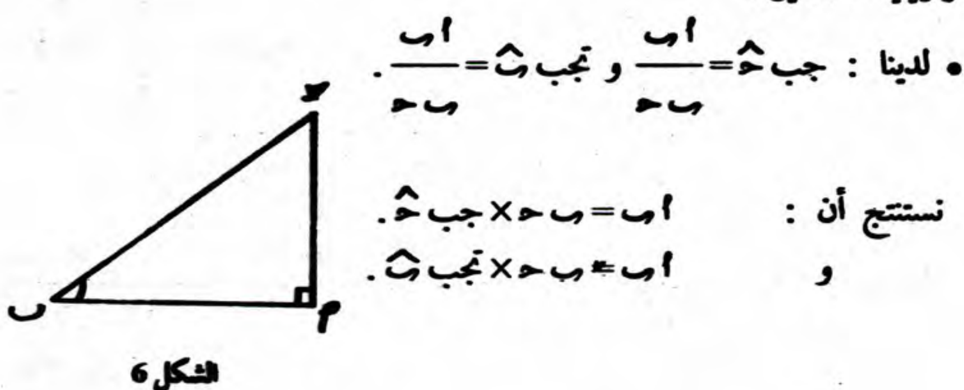
ملاحظة 2 :

ـ لإيجاد النسب المثلثية للزوايا التي أقياسها من 0° إلى 45°
أو (من 0 غر إلى 50 غر) نقرأ الجدول من **الأعلى إلى الأسفل** .
ـ ولإيجاد النسبة المثلثية للزوايا التي أقياسها من 45° إلى 90°
أو (من 50 غر إلى 100 غر) نقرأ الجدول من **الأسفل إلى الأعلى** .

6. إيجاد طول ضلع في مثلث قائم :

ا ب ح مثلث قائم في ا .

لنحسب طول أحد ضلعيه القائمين (مثلاً ا ب) بدلالة نسبة مثلثية لإحدى زاويتيه الحادتين :



• لدينا : جب $\hat{ح}$ = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ح}}$ و تجب $\hat{ب}$ = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ح}}$.

نستنتج أن : ا ب = ب ح × جب $\hat{ح}$.
و ا ب = ب ح × تجب $\hat{ب}$.

الشكل 6

• نجد أيضًا $أحـ = بحـ \times جب \hat{ب}$ و $أحـ = بحـ \times تجب \hat{حـ}$.

في مثلث قائم :
طول ضلع قائم يساوي جداء طول الوتر وجيب قيس الزاوية المقابلة له ،
ويساوي أيضًا جداء طول الوتر وجيب تمام قيس الزاوية المجاورة له .

أبحـ مثلث قائم في أ و $\hat{حـ} = 52°$.
ـ احسب أحـ بدلالة أب و ظل $\hat{حـ}$.

7. تطبيقـات :

1) حساب بعض النسب المثلثية إذا علمت إحدى النسب المثلثية لها .

مثال 1 :

[م س ، م ع] زاوية حادة حيث تجب $\widehat{س م ع} = 0,829$

ولنحسب جب $\widehat{س م ع}$ و ظل $\widehat{س م ع}$.

نعلم أن : $جب^2 \widehat{س م ع} + تجب^2 \widehat{س م ع} = 1$.

أي : $جب^2 \widehat{س م ع} + (0,829)^2 = 1$

ومنه $جب^2 \widehat{س م ع} = 1 - (0,829)^2$

أو $جب^2 \widehat{س م ع} = 1 - 0,687241$

ومنه $جب^2 \widehat{س م ع} = 0,312759$

أي $جب \widehat{س م ع} = \sqrt{0,312759} = 0,559$

ويكون $ظل \widehat{س م ع} = \frac{جب \widehat{س م ع}}{تجب \widehat{س م ع}} = \frac{0,559}{0,829} = 0,674$.

مثال 2 :

. α هو قيس زاوية حيث ظل $\alpha = 0,98$.

ـ لنحسب جب α و تجب α .

الحل :

نعلم أن : $\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha} = \text{ظل } \alpha$

فيكون : $\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha} = 0,98$

وبتربيع الطرفين نجد : $\frac{\text{جب}^2 \alpha}{\text{تجب}^2 \alpha} = (0,98)^2$

أي $\frac{\text{جب}^2 \alpha}{\text{تجب}^2 \alpha} = \frac{0,9604}{1}$.

وحسب خواص التناسب يمكن أن نكتب :

$$\frac{\text{جب}^2 \alpha}{0,9604} = \frac{\text{تجب}^2 \alpha}{1} = \frac{\text{جب}^2 \alpha + \text{تجب}^2 \alpha}{1 + 0,9604}$$

ومنه $\frac{\text{جب}^2 \alpha}{0,9604} = \frac{1}{1,9604}$

أي جب$^2 \alpha = \frac{0,9604}{1,9604} = 0,4899$

نستنتج أن جب $\alpha = \sqrt{0,4899} \underset{\text{ت}}{=} 0,69$

ونعلم أن تجب$^2 \alpha = 1 - \text{جب}^2 \alpha = 1 - 0,4899 = 0,5101$

نستنتج أن تجب $\alpha = \sqrt{0,5101} = 0,71$.

2) إنشاء زاوية علمت إحدى نسبها المثلثية :

مسألة 1 :

ـ لننشىء زاوية حادة [م س ، م ع] حيث تجب $\widehat{\text{س م ع}}$ = ل (ل عدد حقيقي).

ـ نعلم أن جيب تمام زاوية حادة محصور بين 0 ، 1 .

• فإذا كان ل < 0 فالإنشاء غير ممكن .

• وإذا كان ل > 1 فالإنشاء غير ممكن أيضًا .

• إذا كان ل = 0 فالزاوية [م س ، م ع] التي نريد إنشاءها هي زاوية قائمة .

• وإذا كان ل = 1 فالزاوية [م س ، م ع] معدومة .

• وإذا كان 0 < ل < 1 فالزاوية [م س ، م ع] يمكن إنشاؤها كما سنرى في المثال الآتي :

★ لنأخذ تجب $\widehat{\text{س م ع}} = \frac{3}{4}$.

ـ نرسم زاوية قائمة [م س ، م ص] ثم نرسم ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها وحدة الطول بحيث تقطع [م س و [م ع في النقطتين ا ، ب على التوالي .

ـ نعيّن النقطة حـ من [م ا] بحيث م حـ = $\frac{3}{4}$.

ـ نرسم المستقيم الذي يشمل حـ ويعامد [م س فيقطع ربع الدائرة في نقطة ن .

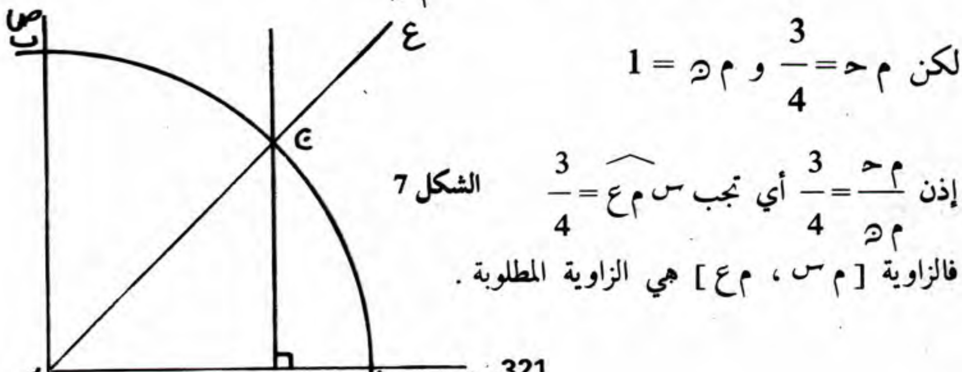
ـ نرسم نصف المستقيم [م ع الذي يشمل ن ، فنحصل على الزاوية

[م س ، م ع] التي جيب تمامها يساوي $\frac{\text{م حـ}}{\text{م ن}}$

لكن م حـ = $\frac{3}{4}$ و م ن = 1

إذن $\frac{\text{م حـ}}{\text{م ن}} = \frac{3}{4}$ أي تجب $\widehat{\text{س م ع}} = \frac{3}{4}$

فالزاوية [م س ، م ع] هي الزاوية المطلوبة .



الشكل 7

مسألة 2 :

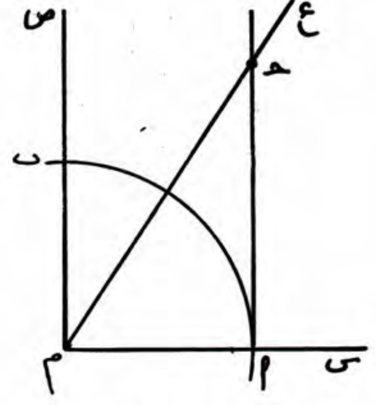
لننشىء زاوية حادة [م س ، م ع] بحيث ظل $\widehat{س م ع}$ = ك (ك عدد حقيقي)
نعلم أن ظل زاوية حادة هو عدد حقيقي موجب .

- فإذا كان ك < 0 فالإنشاء مستحيل .
- وإذا كان ك = 0 فالزاوية [م س ، م ع] معدومة .
- وإذا كان ك > 0 يمكن إنشاء الزاوية الحادة [م س ، م ع] كما سنرى في المثال الآتي :

★ لنأخذ ظل $\widehat{س م ع}$ = 1,5 .

– نرسم زاوية قائمة [م س ، م ص] .

– نرسم ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها وحدة الطول تقطع [م س و [م ص في النقطتين ا ، ب على التوالي .



الشكل 8

– نرسم من النقطة ا عمودًا على [م س (مماس الدائرة في ا) ونعيّن عليه نقطة حـ بحيث ا حـ = 1,5 .

– نرسم نصف مستقيم [م ع الذي يشمل حـ .

- في المثلث القائم م ا حـ لدينا :

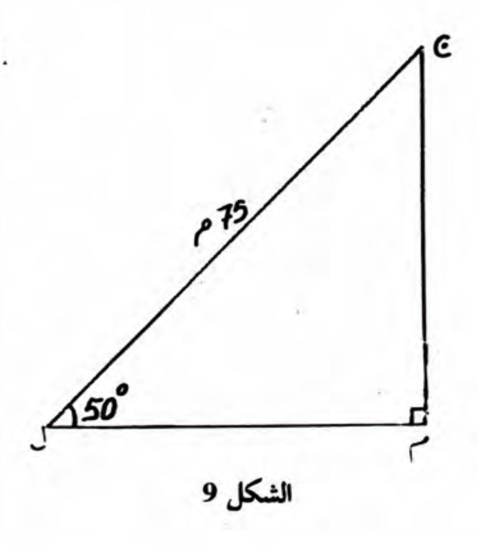
$$\text{ظل } \widehat{\text{ا م حـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ا م}} = \frac{1,5}{1} = 1,5 .$$

فالزاوية [م س ، م ع] هي الزاوية المطلوبة .

3) حل بعض المسائل :

مسألة 1 :

يلعب طفل بطائرة من الورق مربوطة بخيط مشدود طوله 75 م ويميل على الأفق بزاوية قدرها 50° . (الشكل 9)
لنحسب ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض .



الشكل 9

الحل :

جب $\widehat{\text{ه ل م}} = \dfrac{\text{م ه}}{\text{ه ل}}$ ومنه م ه = ه ل × جب $\widehat{\text{ه ل م}}$.

م ه = 75 × جب 50°

نجد في جدول النسب المثلثية أن جب 50° = 0,7660

م ه = 75 × 0,7660

م ه = 57,45 م

أي أن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض يساوي 57,45 م .

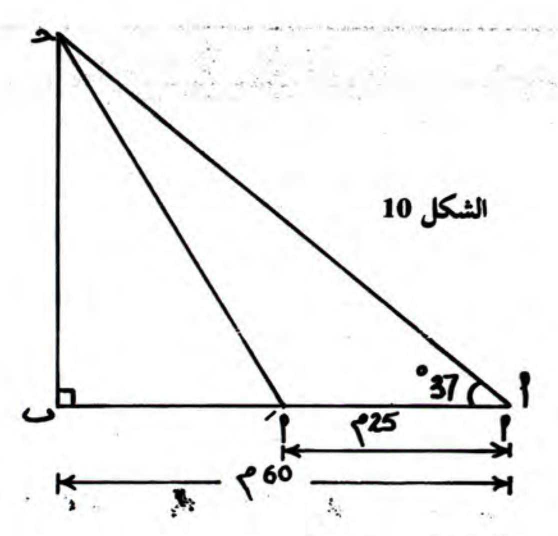
مسألة 2 :

رأى راصد من نقطة ا على سطح الأرض برجًا يبعد عن ا مسافة 60 م وبزاوية قيسها 37° . (الشكل 10) .

• الزاوية [ا ب ، ا ح] تسمى **زاوية الإرتفاع** .

ورأى راصد آخر نفس البرج من نقطة ا′ تقع بين ا و ب وتبعد عن ا مسافة 25 م .

ـ لنحسب ارتفاع البرج ، وقيس زاوية ارتفاع الراصد الثاني .



الشكل 10

الحل :

ـ في المثلث أ ب حـ القائم في ب لدينا :

ظل $37^{\circ} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$ ومنه ب حـ = أ ب × ظل 37°

نجد في جدول النسب المثلثية أن ظل 37° = 0,7536

فيكون ب حـ = 60 × 0,7536 = 45,216

إذن ارتفاع البرج يساوي 45,216 م

ـ في المثلث أ' ب حـ القائم في ب لدينا :

ظل ب$\widehat{\text{أ'}}$حـ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ' ب}}$

لكن أ' ب = أ ب − أ أ' = 60 − 25 = 35

فيكون ظل ب$\widehat{\text{أ'}}$حـ = $\frac{45,216}{35}$ = 1,2918 .

نجد في جدول النسب المثلثية أن :

1,2799 < 1,2918 < 1,3270 أي ظل 52° < 1,2918 < ظل 53°

نقبل أن 52° < ب$\widehat{\text{أ'}}$حـ < 53°

نأخذ ب$\widehat{\text{أ'}}$حـ ≃ 52°

إذن قيس زاوية ارتفاع الراصد الثاني هو 52° تقريبًا .

تمارين

1. أ) عيّن من بين الأعداد الحقيقية ، الأعداد التي يمكن أن تكون جيوب التمام لزوايا حادة :

$\frac{1}{2}$ ، 5 ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{13}{11}$ ، $\frac{15}{17}$ ، $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ، 1,5 .

ب) هل يمكن أن يكون العدد الحقيقي $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ هو جيب تمام زاوية .

علمًا بأن $\sqrt{7} = 2.645$.

في التمارين الآتية وحدة الطول هي السنتمتر.

2. ا ب ح مثلث قائم في ا حيث ا ب = 4,5 و تجب $\hat{ب}$ = $\frac{28}{53}$

ـ احسب ب ح ، ا ح .

3. ا ب ح مثلث قائم في ا حيث ب ح = 7 ، جب $\hat{ح}$ = $\frac{4}{5}$.

احسب كلاً من ا ب ، ا ح ، تجب $\hat{ح}$. ظل $\hat{ح}$.

4. ا ب ح مثلث قائم في ا حيث ا ب = 8 ، ظل $\hat{ب}$ = $\frac{15}{8}$.

ـ احسب كلاً من ا ح ، ب ح ، تجب $\hat{ب}$. جب $\hat{ب}$.

5. ا ب ح مثلث متساوي الساقين حيث ا ب = ا ح = 12 ؛ $\hat{ا}$ = $120°$.

ـ عيّن طول القاعدة [ب ح] ثم احسب الإرتفاع ا هـ بطريقتين.

6. ا ب ح مثلث حيث ا ب = $\frac{\sqrt{70}}{3}$ ؛ ب ح = $\frac{\sqrt{20}}{3}$ ؛ ا ح = $\sqrt{10}$.

1) بيّن أن المثلث ا ب ح قائم

2) احسب كلاً من جب $\hat{ا}$ ، تجب $\hat{ا}$ ، ظل $\hat{ا}$ ، ظل $\hat{ب}$. تظل $\hat{ح}$.

7. ارسم مثلثًا ا ب حـ حيث ا ب = 6 ؛ ا حـ = 4 ، $\hat{ا}$ = 60° .

[ب هـ] ، [حـ ك] هما العمودان المتعلقان بالضلعين [ا حـ] ، [ا ب] على التوالي .

احسب 1) ا هـ ، ب هـ ، حـ هـ ، ب حـ .

2) ا ك ، حـ ك ، ب ك .

8. عيّن باستخدام جدول النسب المثلثية ما يلي :

ا) جيوب الزوايا التي أقياسها :

23° ، 32° ، 35° ، 58 غر ، 25 غر ، 79 غر .

ب) جيوب تمام الزوايا التي أقياسها :

15° ، 76° ، 84 غر ، 50 غر .

حـ) ظلال الزوايا التي أقياسها .

27° ، 32° ، 45° ، 50 غر ، 68 غر .

9. ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث ب حـ = 6 ، ا$\hat{حـ}$ب = 36° .

ـ احسب ا ب ، ا حـ .

10. تحلق طائرة على ارتفاع 1000 م . ما هو بعدها عن برج المراقبة إذا كانت تُرى من البرج بزاوية قيسها 20° ؟

11. (د) دائرة طول قطرها 12 ، [ا ب] وتر يشد قوسًا قيسها 60° .

1) ما هو طول الوتر [ا ب] ؟

2) عيّن المسافة بين مركز الدائرة والوتر [ا ب] .

12. α هو قيس زاوية حاده .

1) عيّن α بالدرجات في كل من الحالات الاتيه .

جب α = 0,4226 ؛ تجب α = 0,8290 ؛ ظل α = 0,9657 ؛

تظل α = 1,1918 .

2) عيّن α بالغرادات في كل من الحالات الآتية :

جب α = 0,2334 ؛ تجب α = 0,7705 ؛ ظل α = 1,5224 ؛

تظل α = 4,1653 .

13. اب ح ء مستطيل بعداه 100 ، 80,12 ومركز تناظره م .

عيّن بالغرادات قيس الزاوية [م ا ، م ب] .

14. اب ح مثلث قائم في ا حيث ا ح = 4 ، ب̂ = 30° .

1) عيّن ح .

2) احسب اب ، ب ح .

3) بيّن أن $\frac{\text{1 - تجب ب̂}}{\text{جب ب̂}} = \frac{\text{جب ب̂}}{\text{1 + تجب ب̂}}$

وأن تظل² ب̂ − تجب² ب̂ = تظل² ب̂ × تجب² ب̂ .

15. احسب جب α في كل من الحالات الآتية حيث α هو قيس زاوية حادة :

1) تجب α = $\frac{3}{4}$ ، 2) تجب α = $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ، 3) تجب α = $\frac{2}{3}$ ؛ 4) تجب α = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. احسب تجب α في كل من الحالات الآتية حيث α هو قيس زاوية حادة :

1) جب α = $\frac{11}{13}$ ، 2) جب α = $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ، 3) جب α = $\frac{17}{20}$.

17. α هو قيس زاوية .

هل يمكن أن يكون :

1) جب α = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{4}$ ؛ تجب α = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) جب α = $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$ ؛ تجب α = $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$.

(ملاحظة : الإجابة تكون بحساب جب² α + تجب² α)

18. α هو قيس زاوية حادة ، برهن ما يلي :

1) (جب α + تجب α)² = 1 + 2 جب α تجب α .

2) (جب α + تجب α)² + (جب α − تجب α)² = 2 .

19. تحقّق أن :

1) جب ($30^\circ + 60^\circ$) = جب 30° تجب 60° + تجب 30° جب 60°

2) تجب ($30^\circ + 60^\circ$) = تجب 30° تجب 60° − جب 30° جب 60° .

20. احسب جب 2 α ، تجب 2 α (α هو قيس زاوية)

علمًا بأن جب ($\alpha + \beta$) = جب α تجب β + تجب α . جب β

وأن تجب ($\alpha + \beta$) = تجب α . تجب β − جب α جب β

حيث β هو قيس زاوية .

21. أنشىء زاوية حادة قيسها α في كل من الحالات الآتية :

تجب α = $64{,}28 \times 10^{-2}$ ؛ جب α = $906{,}3 \times 10^{-3}$ ؛ ظل α = 8098×10^{-4}

22. اب حـ مثلث قائم في ا حيث اب ، ب حـ متناسبان مع العددين 3 ، 4 .

ـ احسب كلاً من جب $\hat{ح}$ ، تجب $\hat{ح}$ ، ظل $\hat{ح}$.

23. اب حـ ء مربع طول ضلعه ط . ننشىء داخل هذا المربع مثلثًا ء حـ هـ متقايس الأضلاع .

1) احسب بالدرجات قيس كل من زوايا المثلثين ا هـ ء ، ا هـ ب .

2) ك ، ل هما المسقطان العموديان للنقطة هـ على الضلعين [اب] ، [ء حـ] على الترتيب .

ـ احسب بدلالة ط كلاً من هـ ل ، هـ ك .

3) احسب ظل هـ $\hat{ا}$ ب .

24. α قيس زاوية . برهن صحة المساويات الآتية :

- $\dfrac{1 - \text{تجب } \alpha}{\text{جب } \alpha} = \dfrac{\text{جب } \alpha}{1 + \text{تجب } \alpha}$

- $\dfrac{1 - \text{جب } \alpha}{\text{جب } \alpha} = \dfrac{\text{تجب } \alpha}{1 + \text{جب } \alpha}$

• $1 + $ ظل$^2 \alpha = \frac{1}{\text{تجب}^2 \alpha}$

• ظل$^2 \alpha$ − جب$^2 \alpha$ = ظل$^2 \alpha$ × جب$^2 \alpha$.

• تظل$^2 \alpha$ − تجب$^2 \alpha$ = تظل$^2 \alpha$ × تجب$^2 \alpha$.

25. α هو قيس زاوية حادة .

ـ احسب جب α ، ظل α في كل من الحالات الآتية :

تجب $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ تجب $\alpha = \frac{1}{4}$ ؛ تجب $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

26. α هو قيس زاوية حادة :

1) عيّن α بحيث يكون :

$\sqrt{3}$ تجب $\alpha + \frac{1}{2}$ تجب $\alpha = \frac{3 + \text{تجب}\,\alpha}{2}$

2) نفرض أن ظل $\alpha = \frac{5}{12}$

ـ برهن أن 144 جب$^2 \alpha$ − 25 تجب$^2 \alpha = 0$.

ـ احسب جب α ، تجب α .

27. ا ، حـ نقطتان متقابلتان قطريًا من دائرة مركزها م ونصف قطرها نق . نرسم وترين [ا ب] . [ا ء] بحيث :

$\widehat{\text{ب ا حـ}} = 45^\circ$ ؛ $\widehat{\text{حـ ا ء}} = 30^\circ$.

1) ما نوع المثلث ا ب حـ؟

2) احسب الطول ا ب بدلالة نق .

3) ما نوع المثلث حـ م ء؟

(من ش. ت. م 1981)

28. ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث $\widehat{احب} = 52°$ ؛ ا حـ = 12 .
[ا هـ] هو العمود المتعلق بالضلع [ب حـ] .
[ا ي] ، [ب ك] ، [حـ ل] هي متوسطات المثلث ا ب حـ .
1) احسب ا هـ ، هـ حـ ، هـ ب ، ب حـ .
2) احسب ا ي ، ب ك ، حـ ك .

29. ا ب حـ مثلث حيث $\hat{ا} = 52°$ ، $\hat{حـ} = 64°$ ، ا ب = 7 .
[ا ا'] ، [ب ب'] هما العمودان المتعلقان بالضلعين [ب حـ] ، [ا حـ] على التوالي .
هـ هي نقطة تقاطع أعمدة المثلث ا ب حـ .
1) احسب كلاً من ا ا' ، ب ب' ، ا ب' ، ب ا' .
2) احسب هـ ا' ، هـ ب' .

30. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي حـ ، $\widehat{احب} = 120°$.
[حـ هـ] هو العمود المتعلق بالضلع [ا ب] حيث حـ هـ = 10 .
[ب ب'] هو العمود المتعلق بالضلع [ا حـ] .
1) احسب كلاً من ا ب ، ا حـ ، ب حـ ، ب ب' .
2) [حـ س هو المنصف الداخلي للزاوية [حـ ا ، حـ ب] ؛ [ا ع هو المنصف الداخلي للزاوية [ا ب ، ا حـ] ، ل هي نقطة تقاطع [حـ س و [ا ع .
احسب ل هـ .
3) (Δ) هو محور الضلع [ا حـ] ، م هي نقطة تقاطع (Δ) و (حـ هـ) .
احسب م ا .

31. ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث ا ب = 6 ، ا حـ = 9 .
ي نقطة من الضلع [ا حـ] بحيث ا ي = 4 .
1) احسب كلاً من ظل $\widehat{ا ي ب}$ ؛ ظل $\widehat{احب}$ ؛ تجب $\widehat{ا ب ي}$.
2) محور [حـ ي] يقطع المستقيمين (ب ي) و (ب حـ) في النقطتين ل ، ك على الترتيب ، والنقطة هـ هي منتصف [حـ ي] .
احسب هـ ك ، $\widehat{هـ ل}$.
استنتج جب $\widehat{هـ ل ي}$ دون حساب ي ل .

32. ا ب حـ مثلث قائم في ا ، حيث ا ب = ل ، ب حـ = 2 ل . (ل طول معلوم)

1) احسب طول الضلع [ا حـ] بدلالة ل .

2) هـ موقع الإرتفاع النازل من ا .

احسب بدلالة ل الأطوال ا هـ ، ب هـ ، هـ حـ .

3) احسب جيب الزاوية [ا هـ ، ا حـ] .

(من ش. ت. م 1982 المنطقة الثانية)

33. ا ب حـ مثلث قائم في ا ، النقطة هـ هي موقع الإرتفاع المتعلق بالوتر [ب حـ] ، طولا القطعتين [ا ب] ، [ا هـ] هما على الترتيب 3 ط ، $\frac{12}{5}$ ط (ط هو طول مفروض) .

1) احسب بدلالة ط كلاً من ب هـ ، ب حـ ، ا حـ .

2) احسب ظل الزاوية [حـ ا ، حـ ب] .

(من ش. ت. م 1982 المنطقة الأولى)

34. ك عدد حقيق موجب ؛ α قيس زاوية بالدرجات حيث $\alpha < 45°$.

ا ب حـ مثلث متساوي الساقين حيث ا ب = ا حـ = ك و $\hat{ا} = 2\alpha$.

[ب هـ] هو العمود المتعلق بالضلع [ا حـ] .

1) احسب ب حـ بدلالة ك و α .

2) احسب ب هـ بدلالة ك و α بطريقتين مستعملاً :

مرة المثلث ا ب هـ ومرة المثلث حـ ب هـ .

3) استنتج من السؤال الثاني أن جب 2α = 2 جب α تجب α

4) ا) احسب كلاً من ا هـ ، حـ هـ بدلالة ك ، α .

ب) برهن أن تجب $2\alpha = 1 - 2$ جب$^2 \alpha$.

35. ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث ا حـ = 3 و ا ب = 6 .

هـ هو المسقط العمودي للنقطة ا على (ب حـ) .

1) احسب ب حـ ، هـ ب ، هـ حـ ، ا هـ .

2) ل هي نظيرة ا بالنسبة للنقطة هـ .

• ماذا يمثّل المستقيم (ب ح) بالنسبة للقطعة [ا ل] ؟

• ما نوع المثلث ب ل ح ؟

3) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (د) المحيطة بالمثلث ا ب ح .

ـ هل النقطة ل تنتمي إلى (د) ؟

4) احسب جب اَحَب و تجب اَحَب .

ـ استنتج قيمة تقريبية للقيس اَحَب إلى الدرجة الواحدة بالنقصان باستعمال جدول النسب المثلثية .

5) (Δ) مستقيم يوازي (ا ل) ويشمل ح .

ا) برهن أن (Δ) مماس للدائرة (د) .

ب) نضع { ك } = (Δ) $\cap$ (ب ل) ، احسب ل ك .

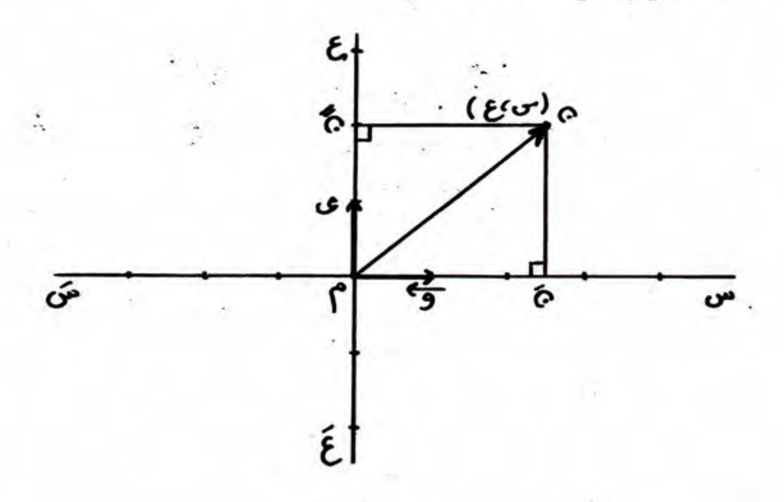
14 تطبيقات أخرى لنظرية فيثاغورث

1.أ) طول شعاع :

مسألة : $(\text{م} ، \vec{\text{و}} ، \vec{\text{ى}})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي

$\text{ه}(\text{س} ، \text{ع})$ نقطة من المستوي .

ـ لنبرهن أن $\|\overrightarrow{\text{م ه}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ع}^2}$



الشكل 1

البرهان :

نسمى $\text{ه}'$ ، $\text{ه}''$ المسقطين العموديين للنقطة ه على (س سَ) ، (ع عَ) .

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم $\text{م ه}'\text{ه}$ يكون :

$$\text{م ه}^2 = \text{م ه}'^2 + \text{ه}'\text{ه}^2$$

لكن $\overline{\text{م ه}'} = \text{س}$ و $\overline{\text{ه}'\text{ه}} = \overline{\text{م ه}''} = \text{ع}$

إذن $\text{م ه}^2 = \text{س}^2 + \text{ع}^2$

فيكون $\text{م ه} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ع}^2}$

ونعلم أن $\text{م ه} = \|\overrightarrow{\text{م ه}}\|$

نستنتج أن $\|\overleftarrow{م ه}\| = \sqrt{س^2 + ع^2}$

وبصفة عامة إذا كان $\overleftarrow{ش}$ شعاعاً في المستوي بحيث $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{م ه}$ فإن:

$\|\overleftarrow{ش}\| = \|\overleftarrow{م ه}\| = \sqrt{س^2 + ع^2}$

نظرية :

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

إذا كان $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ شعاعاً في المستوي فإن :

$\|\overleftarrow{ش}\| = \sqrt{س^2 + ع^2}$

أي إذا كان $\overleftarrow{ش} = س\overleftarrow{و} + ع\overleftarrow{ى}$ فإن :

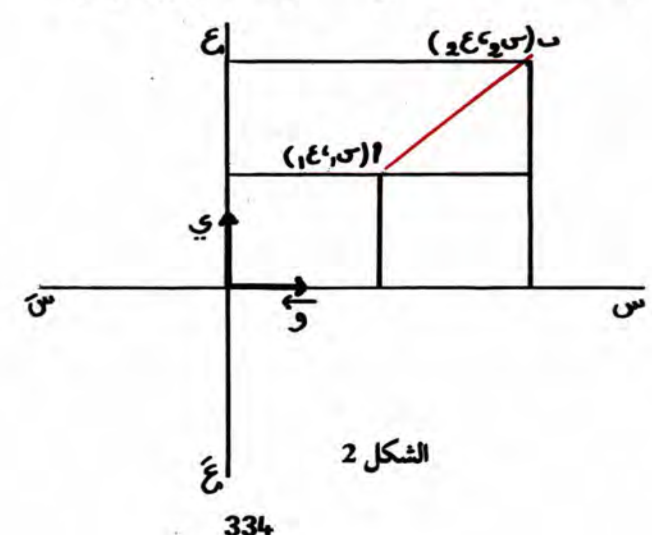
$\|\overleftarrow{ش}\| = \sqrt{س^2 + ع^2}$

ب) طول قطعة مستقيمة أو المسافة بين نقطتين :

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

أ ($س_1$ ، $ع_1$) ، ب ($س_2$ ، $ع_2$) نقطتان من المستوي .

ـ لنبرهن أن $أب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$



الشكل 2

البرهان :

نعلم أنه إذا كانت $ا(س_1 ، ع_1)$ ، $ب(س_2 ، ع_2)$ نقطتان من المستوي فإن مركبتي الشعاع $\overleftarrow{اب}$ هما $(س_2 - س_1)$ و $(ع_2 - ع_1)$

أي $\overleftarrow{اب} \begin{pmatrix} س_2 - س_1 \\ ع_2 - ع_1 \end{pmatrix}$.

وحسب المسألة السابقة نستنتج أن :

$$\| \overleftarrow{اب} \| = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$$

أي $اب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$

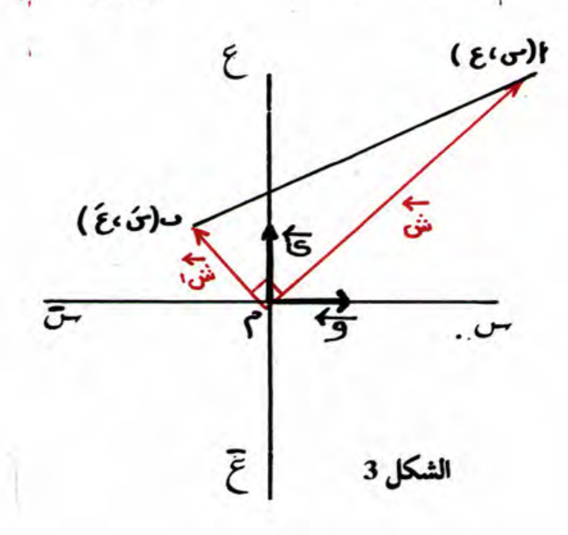
2. شرط تعامد شعاعين :

مسألة .

$(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ معلم متعامد ومتجانس .

$\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{ش'} \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ شعاعان .

ـ لنبرهن أنه إذا كان $\overleftarrow{ش} \perp \overleftarrow{ش'}$ فإن $س س' + ع ع' = 0$



الشكل 3

البرهان :

- نختار نقطتين ا ، ب من المستوي بحيث $\overrightarrow{\text{م ا}} = \overrightarrow{\text{ش}}$

و $\overrightarrow{\text{م ب}} = \overrightarrow{\text{ش}'}$ و $(\text{م ا}) \perp (\text{م ب})$.

لدينا $\text{ا}(\text{س} ، \text{ع})$ و $\text{ب}(\text{س}' ، \text{ع}')$.

نستنتج أن $\text{م ا} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ع}^2}$ ؛ $\text{م ب} = \sqrt{\text{س}'^2 + \text{ع}'^2}$

وأن : $\text{ا ب} = \sqrt{(\text{س}' - \text{س})^2 + (\text{ع}' - \text{ع})^2}$.

ولكن $(\text{م ا}) \perp (\text{م ب})$ فالمثلث ا م ب قائم في م

فيكون لدينا حسب نظرية فيثاغورث :

$$\text{ا ب}^2 = \text{ا م}^2 + \text{م ب}^2$$

أي $\text{ا ب}^2 - (\text{ا م}^2 + \text{م ب}^2) = 0$

$$(\text{س}' - \text{س})^2 + (\text{ع}' - \text{ع})^2 - (\text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س}'^2 + \text{ع}'^2) = 0$$

$$(\text{س}'^2 + \text{س}^2 - 2\text{س}'\text{س}) + (\text{ع}'^2 + \text{ع}^2 - 2\text{ع}'\text{ع}) - (\text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س}'^2 + \text{ع}'^2) = 0$$

أو $(\text{س}'^2 + \text{س}^2 + \text{ع}'^2 + \text{ع}^2) - (\text{س}'^2 + \text{س}^2 + \text{ع}'^2 + \text{ع}^2) - 2(\text{س}'\text{س} + \text{ع}'\text{ع}) = 0$.

أي أنه إذا كان $(\text{م ا}) \perp (\text{م ب})$ فإن :

$$\text{س}'\text{س} + \text{ع}'\text{ع} = 0 .$$

- نقبل في هذا المستوي أنه إذا كان $\overrightarrow{\text{ش}}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{\text{ش}'}\begin{pmatrix}\text{س}'\\ \text{ع}'\end{pmatrix}$ شعاعين

بحيث $\text{س}'\text{س} + \text{ع}'\text{ع} = 0$ فإن $\overrightarrow{\text{ش}} \perp \overrightarrow{\text{ش}'}$

نظرية :

> $(\text{م} ، \overrightarrow{\text{و}} ، \overrightarrow{\text{ى}})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .
>
> $\overrightarrow{\text{ش}}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{ش}'}\begin{pmatrix}\text{س}'\\ \text{ع}'\end{pmatrix}$ شعاعان في نفس المستوي
>
> $\overrightarrow{\text{ش}} \perp \overrightarrow{\text{ش}'}$ معناه $\text{س}'\text{س} + \text{ع}'\text{ع} = 0$.

3. معادلة مستقيم يشمل نقطة ويعامد شعاعاً معلوماً :

مثال :

$(م ، \vec{و} ، \vec{ى})$ معلم متعامد ومتجانس .

$\vec{ش}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع . (ق) مستقيم يشمل النقطة هـ $(-4 ، 2)$ ويعامد منحى الشعاع $\vec{ش}$.

لنبحث عن معادلة للمستقيم (ق)

ـ إذا كانت ن (س ، ع) نقطة من المستوي فإن $\overrightarrow{هـ ن}\begin{pmatrix} س + 4 \\ ع - 2 \end{pmatrix}$.

ن ∈ (ق) معناه $\overrightarrow{هـ ن} \perp \vec{ش}$.

وهذا يعني أن :

$5 (س + 4) - 3 (ع - 2) = 0$ حسب شرط تعامد شعاعين ،

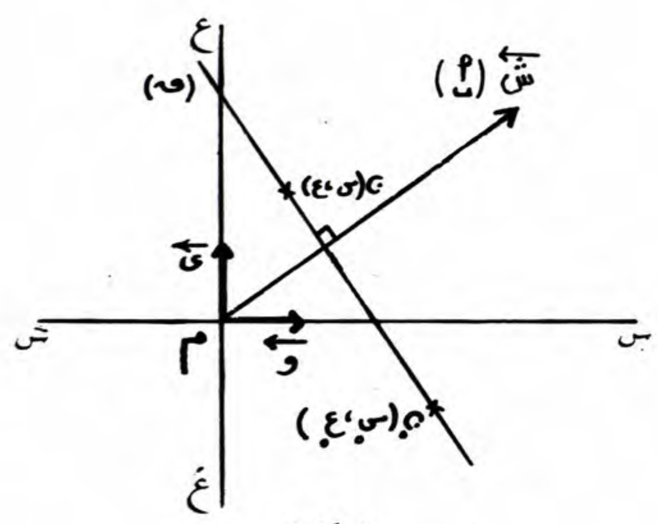
أي $5 س + 20 - 3 ع + 6 = 0$

فتكون $5 س - 3 ع + 26 = 0$ معادلة للمستقيم (ق) .

المستقيم (ق) الذي يشمل النقطة هـ $(-4 ، 2)$ ويعامد الشعاع $\vec{ش}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع) بحيث :

$5 س - 3 ع + 26 = 0$.

• وبصفة عامة يمكن تعيين معادلة للمستقيم الذي يشمل نقطة معلومة $ن_0 (س_0 ، ع_0)$ ويعامد شعاعاً معلوماً $\vec{ش}\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$.



الشكل 4

إذا كانت ه (س ، ع) نقطة من المستقيم (ف) فهذا يعني أن $\overrightarrow{ه_0 ه} \perp \overrightarrow{ش}$

ولدينا $\overrightarrow{ه_0 ه} \begin{pmatrix} س - س_0 \\ ع - ع_0 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{ش} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$.

إذن حسب شرط تعامد شعاعين يكون :

$أ (س - س_0) + ب (ع - ع_0) = 0$

أي $أ س - أ س_0 + ب ع - ب ع_0 = 0$

أو $أ س + ب ع + (- أ س_0 - ب ع_0) = 0$

نضع $- أ س_0 - ب ع_0 = حـ$ فيكون :

$$أ س + ب ع + حـ = 0$$

وهي معادلة المستقيم (ف) الذي يعامد الشعاع $\overrightarrow{ش} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ ويشمل النقطة

$ه_0 (س_0 ، ع_0)$.

ـ نقبل أن المستقيم المعين بمعادلة من الشكل :

$\text{ا س} + \text{ب ع} + \text{حـ} = 0$ يعامد الشعاع الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} \text{ا} \\ \text{ب} \end{pmatrix}$.

ـ وأيضا هذا المستقيم يوازي الشعاع الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} -\text{ب} \\ \text{ا} \end{pmatrix}$

> أوجد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة ع (1 ، − 1) ويعامد الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. شرط تعامد مستقيمين :

مسألة : (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) معلم متعامد ومتجانس ، ولنعين شرط تعامد المستقيمين :

(ف) المعين بالمعادلة $\text{ا س} + \text{ب ع} + \text{حـ} = 0$

(ف′) المعين بالمعادلة $\text{ا}' \text{س} + \text{ب}' \text{ع} + \text{حـ}' = 0$

نعلم أن $\overleftarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} -\text{ب} \\ \text{ا} \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (ف) .

وأن $\overleftarrow{\text{ش}'} \begin{pmatrix} -\text{ب}' \\ \text{ا}' \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (ف′) .

وأن العددين $-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، $-\frac{\text{ا}'}{\text{ب}'}$ هما ميلا المستقيمين (ف) ، (ف′) .

ونعلم أن (ف) ⊥ (ف′) معناه $\overleftarrow{\text{ش}} \perp \overleftarrow{\text{ش}'}$.

ولكن $\overleftarrow{\text{ش}} \perp \overleftarrow{\text{ش}'}$ معناه $(-\text{ب}) \times (-\text{ب}') + \text{ا ا}' = 0$ ،

(حسب شرط تعامد شعاعين)

ومنه $\text{ا ا}' = (-\text{ب}) \times (-\text{ب}')$

وبالقسمة على العدد غير المعدوم (- ب) x(- ب′) نجد :

$\frac{أأ'}{(-ب)\times(-ب')} = -1$ أي $\left(-\frac{أ}{ب}\right) \times \left(-\frac{أ'}{ب'}\right) = -1$

هذا يعني أن جداء ميلي المستقيمين (ق) ، (ق′) يساوي − 1

نظرية :

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس .

((ق) ، (ق′) مستقيمان متعامدان) معناه (جداء ميليهما يساوي − 1)

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس .

(ق) ، (ك) مستقيمان معينان على الترتيب بالمعادلتين :

2 س + 3 ع − 5 = 0 و 9 س − 6 ع = 0 .

بين أن (ق) ، (ك) متعامدان .

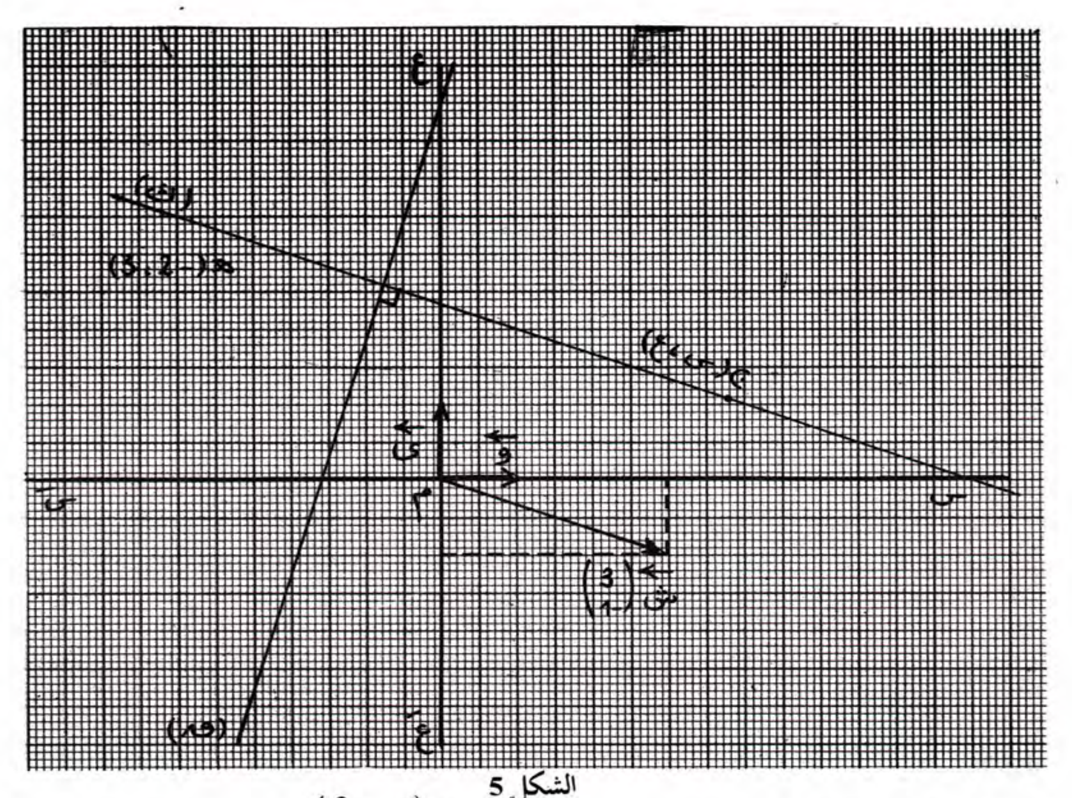
5. معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويعامد مستقيماً معلوماً :

مثال : (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس .

(ق) مستقيم معين بالمعادلة : 3 س − ع + 5 = 0

ـ لنعيّن معادلة للمستقيم (ك) العمودي على (ق) والذي يشمل النقطة

هـ (− 2 ، 3) .



الشكل 5

إن المستقيم (ق) عمودي على الشعاع $\overleftarrow{ش}$ $\begin{pmatrix}3\\ 1-\end{pmatrix}$.

وبما أن المستقيم (ك) عمودي على (ق) فإن (ك) يوازي $\overleftarrow{ش}$.

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .

ن ∋ (ك) معناه $\overleftarrow{هـ ن}$ // $\overleftarrow{ش}$.

ولكن $\overleftarrow{هـ ن}$ $\begin{pmatrix}س + 2\\ ع - 3\end{pmatrix}$. و $\overleftarrow{ش}$ $\begin{pmatrix}3\\ 1-\end{pmatrix}$.

إذن $- 1 \times (س + 2) - 3 \times (ع - 3) = 0$

أي $- س - 2 - 3ع + 9 = 0$

$- س - 3ع + 7 = 0$

ومنه $س + 3ع - 7 = 0$ ، وهي معادلة للمستقيم (ك).

مسألة محلولة

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس . وحدة الطول هي السنتيمتر .

ا (1 ، 0) ، ب (0 ، 3) ، حـ (– 9 ، 0) ثلاث نقط من المستوي .

1) احسب كلاً من اب ، اح ، ب ح . واستنتج أن المثلث ا ب ح قائم في ب .

2) ا) اكتب معادلة للمستقيم (ب ح) ، ثم عيّن ميله .

بيّن أن النقطة ى (– 3 ، 2) تنتمي إلى (ب ح) .

ب) عيّن إحداثيي النقطة ك منتصف القطعة [ى ح] ثم أوجد معادلة للمستقيم (ه) محور [ى ح] .

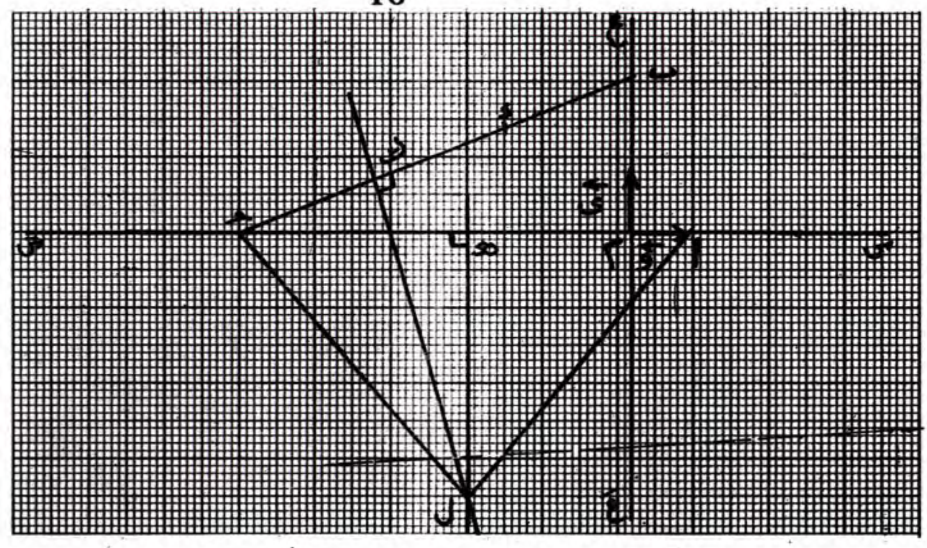
حـ) ﻫ منتصف القطعة [ا ح] ، المستقيم العمودي على (س′س) في ﻫ يقطع (ه) في النقطة ل . عين إحداثيي ل .

3) ا) برهن على أن ل هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا ح ى .

ب) قارن بين ل ﻫ و ح ا . ما نوع المثلث ا ل ح ؟

عين ل ﻫ ثم تحقق أن ا ل ح ب رباعي دائري .

4) بيّن أن جب $\widehat{ا ح ب}$ = جب $\widehat{ﻫ ل ك}$ = $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



« شكل 6 »

الحل :

• $\text{ا ب} = \sqrt{(0-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$

$\text{ا حـ} = \sqrt{(-9-1)^2 + (0-0)^2} = 10$

$\text{ب حـ} = \sqrt{(-9-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{10}$

ملاحظة :

بما أن النقطتين ا ، حـ من (س′س) فإنه يمكن حساب ا حـ بطريقة أخرى كما يلي :

$\text{ا حـ} = |\overline{\text{ا حـ}}| = |\text{م}_{\text{حـ}} - \text{م}_{\text{ا}}| = |-9-1| = |-10| = 10$

• لدينا $\text{ا ب}^2 + \text{ب حـ}^2 = 10 + 9 \times 10 = 100$.

و $\text{ا حـ}^2 = 100$.

إذن $\text{ا ب}^2 + \text{ب حـ}^2 = \text{ا حـ}^2$.

فالمثلث ا ب حـ قائم في ب .

2) ا) إيجاد معادلة للمستقيم (ب حـ) :

نفرض نقطةً ن (س ، ع) بحيث ن ∈ (ب حـ) .

فيكون $\overrightarrow{\text{ب ن}} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ع} - 3 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{\text{ا ب}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ لكن $\overrightarrow{\text{ب ن}} \perp \overrightarrow{\text{ا ب}}$.

فحسب شرط تعامد شعاعين نجد :

$(-1) \times \text{س} + 3 \times (\text{ع} - 3) = 0$.

أي $-\text{س} + 3\text{ع} - 9 = 0$

أو $\text{س} - 3\text{ع} + 9 = 0$ وهي معادلة للمستقيم (ب حـ) ويمكن أن نكتبها على الشكل :

$3\text{ع} = \text{س} + 9$.

أو $ع = \frac{1}{3} س + 3$.

نستنتج أن ميل (ب حـ) يساوي $\frac{1}{3}$.

• لدينا $-3 - 3 \times 2 + 9 = 0$.

إذن النقطة د (-3 ، 2) تنتمي إلى المستقيم (ب حـ) .

ب) **تعيين إحداثيي النقطة ك منتصف** [د حـ] :

• لدينا حـ (-9 ، 0) ؛ د (-3 ، 2) و ك منتصف [د حـ] .

فيكون $س_ك = \frac{س_حـ + س_د}{2}$ و $ع_ك = \frac{ع_حـ + ع_د}{2}$.

أي $س_ك = \frac{-9 - 3}{2} = -6$ $ع_ك = \frac{0 + 2}{2} = 1$.

إحداثيا النقطة ك هما -6 و 1 .

• **إيجاد معادلة للمستقيم (ه) محور** [د حـ] :

(ه) يشمل النقطة ك (-6 ، 1) ويعامد الشعاع $\overleftarrow{ب حـ} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

نفرض أن (ه) يشمل نقطة أخرى ط (س ، ع)

فيكون $\overleftarrow{ك ط} \begin{pmatrix} س + 6 \\ ع - 1 \end{pmatrix}$ ولكن $\overleftarrow{ك ط} \perp \overleftarrow{ب حـ}$.

فحسب شرط تعامد شعاعين يكون :

$9 \times (س + 6) + 3 \times (ع - 1) = 0$

$9 س + 54 + 3 ع - 3 = 0$

$9 س + 3 ع + 51 = 0$

أو $3 س + ع + 17 = 0$

حـ) **تعيين إحداثيي ل :**

• لدينا (ق) ∩ (ل هـ) = {ل}.

ومعادلة (ق) هي 3 س + ع + 17 = 0.

ـ لنعيّن معادلة للمستقيم (ل هـ) حيث هـ منتصف [أ حـ].

و أ (1 ، 0) و حـ (− 9 ، 0).

فيكون إحداثيا النقطة هـ هما $\left(\frac{1-9}{2} ، \frac{0+0}{2}\right)$ أي هـ (− 4 ، 0).

وبما أن (ل هـ) ⊥ (س′ س) فإن معادلة (ل هـ) هي : س + 4 = 0 .

ولإيجاد إحداثيي النقطة ل نقطة تقاطع (ق) و (ل هـ) نحل الجملة :

$$\begin{cases} 3 \text{ س} + \text{ع} + 17 = 0 \quad \ldots\ldots (1). \\ \text{س} + 4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2). \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد س = − 4 .

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد : − 12 + ع + 17 = 0 .

ومنه ع = − 17 + 12

إذن ع = − 5

نستنتج أن إحداثيي النقطة ل هما − 4 ، − 5 .

3) أ) **إثبات أن ل هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث** أ حـ ء :

• بما أن هـ هي منتصف [أ حـ] و (ل هـ) ⊥ (أ حـ) ،

فإن (ل هـ) هو محور [أ حـ]

نستنتج أن ل أ = ل حـ .

وبما أن (ق) هو محور [ء حـ] فإن ل ء = ل حـ .

فيكون ل أ = ل حـ = ل ء

فالنقطة ل هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا حـ ء .

ب) بما أن ل ا = ل حـ فإن المثلث ا ل حـ متساوي الساقين رأسه ل .

وبما أن ل (− 4 ، − 5) ، هـ (− 4 ، 0) ،

فإن ل هـ = $\sqrt{(-4+4)^2 + (-5-0)^2} = 5$.

ونعلم أن ا حـ = 10

فيكون ل هـ = $\frac{1}{2}$ ا حـ ، وبما أن [ل هـ] متوسط في المثلث المتساوي الساقين ا ل حـ ،

فإن ا ل حـ متساوي الساقين وقائم في ل .

ـ في الرباعي ا ل حـ ب الزاويتان المتقابلتان [ل ا ، ل حـ] و [ب ا ، ب حـ] متكاملتان . نستنتج أنه رباعي دائري .

4) نضع (ل ك) ∩ (حـ هـ) = { ف } .

ـ في المثلثين ل هـ ف و حـ ك ف :

$\hat{هـ} = \hat{ك} = 1$ قا

و ل ف هـ = حـ ف ك (بالتقابل بالرأس) .

نستنتج أن ك حـ ف = هـ ل ف أو ا حـ ب = هـ ل ك .

فيكون جب ا حـ ب = جب هـ ل ك .

وبما أن جب ا حـ ب = $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

فإن جب ا حـ ب = جب هـ ل ك = $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

تمارين

نعتبر في كل التمارين الآتية أن المعلم متعامد ومتجانس.

1. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط بحيث ا (4 ، 6) ، ب (2 ، 1) ، حـ (6 ، 1).
   1) احسب إحداثيي م منتصف [ب حـ] ، وإحداثيي م′ منتصف [ا ب] ، وإحداثيي م″ منتصف [ا حـ].
   2) احسب ب حـ ، حـ ا ، ا ب ، ا م.
   3) ما نوع المثلث ا ب حـ؟

2. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط بحيث ا (− 1 ، 3) ؛ ب (3 ، 5) ؛ حـ (5 ، 1) ؛ ء (1 ، − 1).
   1) احسب أطوال أضلاع الرباعي ا ب حـ ء. ما نوع الرباعي ا ب حـ ء؟
   2) احسب إحداثيي نقطة تقاطع قطري الرباعي ا ب حـ ء.

3. 1) علّم النقط ا (3 ، 5) ؛ ب (1 ، 4) ؛ حـ (2 ، 2).
   2) بيّن أن المثلث ا ب حـ قائم في ب ومتساوي الساقين.
   3) ه منتصف القطعة [ا حـ]. بيّن أن ب ه $= \frac{1}{2}$ ا حـ.

4. أوجد معادلة لمحور القطعة [ا ب] في كل من الحالات الآتية:
   1) ا (3 ، 2) ؛ ب (− 1 ، 3).
   2) ا (0 ، 3) ؛ ب (2 ، − 3).
   3) ا (1 ، 2) ؛ ب $\left(\frac{5}{2} ، 4 \right)$.
   4) ا $\left(-\frac{1}{2} ، 3 \right)$ ؛ ب (5 ، − 1).
   5) ا $\left(\frac{3}{2} ، -2 \right)$ ؛ ب (2 ، 2).
   6) ا (− 1 ، 1) ؛ ب (1 ، − 1).

5. أ(3 ، 0) ؛ ب(3 ، −2) ؛ ح(−1 ، −2) نقط من المستوي .

1) بيّن أن $\overrightarrow{\text{ب أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب ح}}$. استنتج نوع المثلث أ ب ح .

2) بين أن النقط أ ، د (7 ، 2) ؛ هـ(−5 ، −4) على استقامة واحدة .

3) ه ، ه′ هما منتصفا الضلعين [أ ب] ، [ب ح] على الترتيب . أوجد العدد الحقيقي ك بحيث :
$\overrightarrow{\text{ه ه′}} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{أ ح}}$ ثم استنتج أن (ه ه′) // (أ د) .

6. أ ، ب ، ح ، د نقط من المستوي بحيث :
$\overrightarrow{\text{م أ}} = 3\overrightarrow{\text{و}} + 3\overrightarrow{\text{ي}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{م ب}} = 3\overrightarrow{\text{و}} - 3\overrightarrow{\text{ي}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{م ح}} = -3\overrightarrow{\text{و}} - 3\overrightarrow{\text{ي}}$ ؛
$\overrightarrow{\text{م د}} = -3\overrightarrow{\text{و}} + 3\overrightarrow{\text{ي}}$.

1) برهن أن (أ ح) ⊥ (ب د) .

2) برهن أن $\overrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overrightarrow{\text{ب ح}}$ وأن $\overrightarrow{\text{أ د}} // \overrightarrow{\text{ب ح}}$ وأن ح د = أ د .

3) ما نوع الرباعي أ ب ح د ؟

4) احسب كلاً من جب $\widehat{\text{أ ح د}}$ ، ظل $\widehat{\text{أ ح د}}$ ، تجب $\widehat{\text{أ ب د}}$.

7. أ(3 ، 8) ؛ ب(8 ، 3) ؛ ح(1 ، 2) ؛ د(−4 ، 7) نقط من المستوي .

1) بيّن أن الرباعي أ ب ح د متوازي أضلاع .

2) ه(5 ، 6) نقطة من المستوى . بيّن أن النقط ه ، أ ، ب على استقامة واحدة .

3) بيّن أن (ح ه) و (أ ب) متعامدان في النقطة ه .

8. (ق) ، (ك) مستقيمان بحيث :
(ق) : 3 س − 2 ع − 1 = 0 .
(ك) : 2 س + 3 ع − 1 = 0 .

1) بيّن أن (ق) ⊥ (ك) .

2) أنشىء كلاً من (ق) و (ك) .

9. (ق) مستقيم يشمل النقطة هـ$\left(\frac{1}{2} \text{ ، } -\frac{1}{2}\right)$ ؛ $\overrightarrow{\text{ص}}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه له .

1) أوجد معادلة للمستقيم (ق) .

2) أوجد معادلة للمستقيم (ل) الذي يشمل ه ويعامد (ق) .

3) (ك) مستقيم يشمل ه ويوازي $\vec{ش}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. عيّن α ، β في كل من الحالتين الآتيتين :

أ) (ق) // (ك) و $1 - \alpha = 2\beta$.

ب) (ق) ⊥ (ك) و $\alpha = -\beta\sqrt{3}$.

10. (ق) : 3 س − 3 ع + 2 = 0 .

أ نقطة بحيث أ(−2 ، 1) .

1) عيّن شعاع توجيه للمستقيم (ق) .

2) أوجد معادلة للمستقيم (ق') الذي يشمل أ ويعامد (ق) .

3) ارسم (ق) و (ق') .

11. 1) علم النقط أ(1 ، 0) ؛ ب(−1 ، 3) ؛ حـ(2 ، 4) .

2) احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{بحـ}$.

3) أ) أوجد معادلة للمستقيم (ل) العمودي على (ب حـ) والذي يشمل أ .

ب) أوجد أربعة أشعة لتوجيه المستقيم (ل) .

4) ارسم المستقيمات (أ ب) ، (أ حـ) ، (ب حـ) ، (ل) .

12. (ق) مستقيم معادلته : (3 ط + 1) س − (ط − 2) ع + 2 ط − 1 = 0 .

(حيث ط عدد حقيقي) . أ(1 ، 2) نقطة .

1) عيّن ط بحيث يكون (ق) يشمل أ .

2) عيّن ط بحيث يكون المستقيم (ق) موازياً للمستقيم (ل) الذي معادلته :
2 س − 3 ع + 1 = 0 .

3) عيّن ط لكي يكون (ق) عمودياً على المستقيم (ل) الذي معادلته
س − 5 ع = 0 .

4) ارسم المستقيمات (ق) ، (ك) ، (ل) .

13. (ق) : -5 س $+ 2$ ع $- 3 = 0$.

1) عيّن العدد الحقيقي α لكي يكون المستقيم (ق) موازياً للمستقيم (ك) الذي معادلته α س $+ 3$ ع $- 1 = 0$.

2) عيّن العدد الحقيقي β لكي يكون المستقيم (ق) عمودياً على المستقيم (ل) الذي معادلته -2 س $+ \beta$ ع $+ 2 = 0$.

14. أ (-4 ، 2) ؛ ب (3 ، 3) ؛ حـ (8 ، -2) ؛ هـ (2 ؛ 0) . نقاط من المستوى .

1) بيّن أن النقطة حـ هي نظيرة أ بالنسبة إلى هـ . وأن الشعاعين $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ و $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ متعامدان .

2) د هي نظيرة النقطة ب بالنسبة إلى هـ .

ـ برهن أن الرباعي أ ب حـ د معيّن ثم احسب طول ضلعه .

3) ل نقطة من المستوي بحيث $\overrightarrow{\text{د ل}} = \overrightarrow{\text{ب أ}}$.

بيّن أن (أ ل) // (ب د) .

4) (د) دائرة قطرها [أ حـ] .

ـ عيّن مركزها ثم احسب نصف قطرها .

ـ عيّن المماس لهذه الدائرة في النقطة أ .

15. ينسب المستوى إلى معلم متعامد ومتجانس . وحدة الطول هي السنتيمتر .

1) ارسم المستقيم (ق) الذي معادلته ع = 2 س $+ 8$.

2) المستقيم (ق) يقطع المستقيم (ع' ع) في النقطة أ ويقطع المستقيم (س' س) في النقطة ب .

أ) احسب إحداثيي كلٍّ من النقطتين أ ، ب .

ب) حـ هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب م . احسب احداثيي النقطة حـ .

3) [م هـ] هو عمود المثلث أ م ب المتعلق بالضلع [أ ب] .

ما هما طولا القطعتين [م أ] ، [م ب] ؟ احسب طول كل من القطع [أ ب] ، [م حـ] ، [م هـ] .

4) أوجد معادلة المستقيم (م هـ) .

5) احسب جيب الزاوية [$\hat{ا ب}$. ا م] .

(من امتحان ش . ت . م 1982/04/23 بتصرف).

16. ينسب المستوى إلى معلم متعامد متجانس (م . $\overrightarrow{و}$. $\overrightarrow{ى}$) . حاملا محوريه هما (س'س) ، (ع'ع) . وحدة الطول هي السنتيمتر.

ا (3 ، 2) ، ب (− 3 ، 7) نقطتان من المستوي

1) احسب إحداثيي النقطة ﻫ منتصف القطعة [ا ب] .

برهن أن النقطة ﻫ تنتمي إلى المستقيم (ع'ع) .

2) أوجد معادلة للمستقيم (ا ب) .

3) ارسم المستقيم (△) الذي معادلته ع $= \frac{6}{5}$ س $+ 4,5$.

4) ا) برهن أن المستقيمين (△) ، (ا ب) متعامدان .

ب) استنتج أن (△) هو محور القطعة [ا ب] .

5) إن الدائرة التي مركزها ﻫ ونصف قطرها ﻫا تقطع المستقيم (△) في النقطتين ح ، ح' .

ـ احسب طول كل من القطعتين [ﻫ ح] ، [ب ح] .

(من امتحان ش . ت . م 1982/6/1 المنطقة الثانية)

17. ا (1 ، − 2) ؛ ب (5 ، 0) ؛ ح $\left(\frac{13}{2} ، -3 \right)$ نقاط من المستوي

1) عيّن إحداثيي النقطة ء بحيث يكون الرباعي ا ب ح ء متوازي أضلاع .

2) بيّن أن النقط م ، ا ، ء على استقامة واحدة .

3) احسب كلاً من ا ب ، ا ء ، ب ء . ثم استنتج أن المثلث ا ب ء قائم .

4) نضع { ﻫ } = (ا ح) ∩ (ب ء) .

ـ احسب إحداثيي النقطة ﻫ .

المستقيم الذي يوازي (ب ح) ويشمل ﻫ يقطع (م ب) في ك

ـ برهن أن ك هي منتصف [م ب] .

5) برهن أن النقط ا ، ب ، ح ، ء ، ك تنتمي إلى دائرة مركزها ﻫ .

18. ا(– 4 ، – 2) ؛ ب(2 ، 6) ؛ ح(6 ، 3) نقط من المستوي

1) برهن أن $3\,\overrightarrow{\text{م ا}} + 2\,\overrightarrow{\text{ا ح}} = \overrightarrow{0}$

2) برهن أن المثلث ا ب ح قائم .

3) ك ، ى نقطتان بحيث : $\overrightarrow{\text{ا ك}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{ا ح}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ى}} = 2\,\overrightarrow{\text{ب ك}}$.

ـ عين إحداثيي كل من ك و ى .

ـ برهن أن الرباعي ا ب ح ى مستطيل .

4) ل (2 ، – 5) نقطة من المستوي .

برهن أن النقط ا ، ب ، ح ، ى ، ل تنتمي إلى دائرة مركزها ك يطلب تعيين نصف قطرها .

5) إذا كان α هو القيس بالدرجات للزاوية [ا ب ، ا ح] فاحسب ظل α .

ـ أوجد حصراً بالتقريب إلى الدرجة للقيس α باستعمال جدول النسب المثلثية .

19. ا(6 ، 0) ؛ ب(12 ، 0) ؛ ح(0 ، – 6) نقط من المستوي

1) بيّن أن س – ع – 6 = 0 هي معادلة للمستقيم (ا ح)
وأن س – 2 ع – 12 = 0 هي معادلة للمستقيم (ب ح) .

2) (ل) مستقيم معادلته س + ع = 0 .

ـ بيّن أن (ل) يقطع (ا ح) في النقطة د (3 ، – 3) ويقطع (ب ح) في النقطة هـ (4 ، – 4) .

3) نسمي ف ، ق ، ك منتصفات القطع [م ح] ، [ا هـ] ، [ب د] على الترتيب .

ا) احسب إحداثيي كل من هذه النقط .

ب) بيّن أن ف ، ق ، ك على استقامة واحدة .

4) (ي) مستقيم معين بالمعادلة :
(ط – 1) س + (2 ط – 1) ع + ط – 1 = 0 (حيث ط عدد حقيقي)

عيّن ط في كل من الحالات الآتية :

ا) ف تنتمي إلى (ي) .

ب) (ي) // (ل) .

حـ) (ي) ⊥ (ب حـ) .

20. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط بحيث :

$\overrightarrow{م ا} = 5 \overrightarrow{ى}$ ؛ $\overrightarrow{م ب} = -3 \overrightarrow{و} + 4 \overrightarrow{ى}$ ؛ $\overrightarrow{ب حـ} = 6 \overrightarrow{و} - 8 \overrightarrow{ى}$.

1) احسب إحداثيي النقطة ء بحيث يكون الرباعي ا ب حـ ء متوازي أضلاع .

• عيّن موقع النقطة م بالنسبه إلى النقطتين ب و حـ .

2) ما نوع الرباعي م ا هـ حـ حيث هـ هي منتصف [ا ء] .

3) برهن أن المثلث ا ب حـ قائم في ا .

ـ احسب إحداثيي مركز الدائرة المحيطة به .

4) α هو القيس بالدرجات للزاوية [حـ ا ، حـ ب] .

عيّن جب α ثم قيمة تقريبية للقيس α إلى الوحدة بالنقصان إذا علمت أن $3,16 < \sqrt{10} < 3,17$.

5) ث هو مركز ثقل المثلث ا ب حـ .

برهن أن النقط ب ، ث ، ء على استقامة واحدة .

21. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (م ، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ى}$) محوراه (س' س) و (ع' ع) .

($ف_1$) مستقيم معادلته ع = س + 3 .

($ف_2$) مستقيم معادلته ع = − س + 3

1) المستقيم ($ف_1$) يقطع (س' س) في النقطة ب ، والمستقيم ($ف_2$) يقطع (س' س) في النقطة حـ . احسب إحداثيات النقطتين ب ، حـ .

برهن أن المستقيمين ($ف_1$) ، ($ف_2$) يقطعان (ع' ع) في نقطة واحدة ا . ارسم المستقيمين ($ف_1$) ، ($ف_2$) .

2) برهن أن النقطة م هي منتصف القطعة [ب ح] . وأن المثلث أ ب ح متساوي الساقين وقائم في أ.

3) هـ نقطة من المستوي فاصلتها معدومة وترتيبها – 3 .

أوجد معادلة للمستقيم (هـ ح) .

4) برهن أن المستقيم (هـ ح) يوازي المستقيم ($ق_1$) .

5) برهن أن للقطعتين المستقيمتين [ب ح] ، [أ هـ] نفس المنتصف . وأن الرباعي أ ب هـ ح مربع

(من امتحان ش . ت . أ)

15 مسائل من الدرجة الأولى

نقدم في هذا الباب مسائل عامة من الحياة اليومية . أو مسائل هندسية يؤول حلها إلى :

- حل معادلات من الدرجة الأولى بمجهول حقيقي. أو
- حل جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين .

لحل هذا النوع من المسائل نراعي المراحل الآتية :

1) قراءة نص المسألة وتحليله لتحديد المعطيات والمجاهيل .
2) التفسير الرياضي لنص المسألة وذلك باختيار رمز (أو رموز) للمجهول (أو للمجاهيل)
3) وضع المسألة على شكل معادلة أو جملة معادلتين .
4) حل هذه المعادلات أو الجمل جبرياً أو بيانياً بالطرق المعروفة .
5) التحقق من أن حلول هذه المعادلات أو الجمل هي حلول للمسألة المفروضة .

1• مسائل تؤول إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

مسألة 1 :

لمحمد وأحمد وعلي مبلغ مالي مشترك قدره 1250 د.ج.

صرف محمد نصف حصته ، وصرف أحمد 10٪ من المبلغ الإجمالي . وصرف علي $\frac{2}{5}$ ما صرفه محمد وأحمد . وبقي لهم 305 د.ج .

ما هي حصة محمد من هذا المال ؟ وما مصروف كلّ منهم ؟

الحل :

1) تحديد المعالم والمجاهيل في المسألة :

- المعالم هي :

ـ المبلغ الاجمالي للأشخاص الثلاثة وهو 1250 د.ج .

ـ باقي المصاريف 305 د.ج .

ـ مصروف محمد وهو نصف حصته .

ـ مصروف أحمد وهو 10٪ من المبلغ الإجمالي. أي

$$\frac{10 \times 1250}{100} = 125$$ د.ج .

ـ مصروف علي وهو $\frac{2}{5}$ من مصروف محمد وأحمد .

- المجهول هو :

ـ حصة محمد .

2) اختيار رمز للمجهول :

نفرض أن حصة محمد من هذا المال هي س ، فيكون :

ـ مصروفه يساوي $\frac{1}{2}$ س .

ـ ومصروف علي يساوي $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\text{س} + 125\right)$.

3) وضع المسألة على شكل معادلة :

نعلم أن المبلغ الباقي بعد المصاريف يساوى 305 د.ج .

فيكون :

$$1250 - \left[\frac{1}{2}\text{س} + 125 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\text{س} + 125\right)\right] = 305$$

وبذلك نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

4) حل هذه المعادلة :

لنحل المعادلة :

$$1250 - \left[\frac{1}{2}\text{س} + 125 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}\text{س} + \frac{2}{5} \times 125\right] = 305$$

$$1250 - \left(\frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{5}\text{س} + 125 + 50\right) = 305$$

$$1250 - \left(\frac{7}{10}\text{س} + 175\right) = 305$$

$$1250 - \frac{7}{10}\text{س} - 175 = 305 .$$

$$1250 - 175 - \frac{7}{10}\text{س} = 305$$

$$1075 - \frac{7}{10}\text{س} = 305$$

$$-\frac{7}{10}\text{س} = 305 - 1075$$

$$-\frac{7}{10}\text{س} = -770 \quad \text{أي} \quad \frac{7}{10}\text{س} = 770$$

$$\text{فيكون س} = \frac{770}{\frac{7}{10}} = 770 \times \frac{10}{7} = \frac{7700}{7} .$$

أي $\text{س} = 1100$

إذن : حصة محمد هي 1100 د . ج .

ـ ومصروفه يساوي $\frac{1}{2}$ س

أي $\frac{1}{2} \times 1100 = 550$ دج .

ـ ونعلم أن مصروف أحمد يساوي 125 د . ج .

ـ ومصروف علي بالدينار هو $\frac{2}{5}(550 + 125) = \frac{2}{5} \times 675 = 270$

5) التحقيق :

مجموع المصاريف بالدينار هو $550 + 125 + 270 = 945$

والباقي : $1250 - 945 = 305$

مسألة 2 :

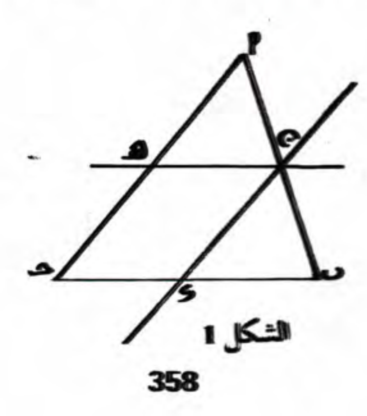
وحدة الطول هي السنتيمتر .

اب ح مثلث حيث اب = 9 ، اح = 12 ، ب ح = 6 ؛

ﻫ نقطة من [اب] ، المستقيم الذي يشمل ﻫ ويوازي (ب ح) ، يقطع (اح) في ﻫ ؛

والمستقيم الذي يشمل ﻫ ويوازي (اح) ، يقطع (ب ح) في ى . (الشكل 1) .

ـ عيّن اﻫ بحيث يكون محيط متوازي الأضلاع ﻫ ﻫ ح ى يساوي 20 .



الشكل 1

الحل :

• **المعلوم في هذه المسألة :**

ـ أطوال أضلاع المثلث أبجـ .

• **المجهول في هذه المسألة :** أد

ـ بتطبيق نتيجة نظرية طالس على المثلث أبجـ ، حيث (دهـ) // (بجـ) نجد أن :

$$\frac{\text{أد}}{\text{أب}}=\frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}=\frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$$

ومنه $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}=\frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$ .... (1)

وبما أن (دو) // (أجـ) فلدينا أيضاً :

$$\frac{\text{بد}}{\text{بأ}}=\frac{\text{بو}}{\text{بجـ}}=\frac{\text{دو}}{\text{أجـ}}$$

ومنه $\frac{\text{بد}}{\text{بأ}}=\frac{\text{دو}}{\text{أجـ}}$ .... (2)

• نضع أد = س فيكون بد = أب − س = 9 − س

بالتعويض في (1) نجد أن :

$\frac{\text{س}}{9}=\frac{\text{دهـ}}{6}$ أي $9\times\text{دهـ}=6\times\text{س}$

ومنه $\text{دهـ}=\frac{6}{9}\text{س}=\frac{2}{3}\text{س}$ .... (3)

وبالتعويض في (2) نجد أن :

$\frac{9-\text{س}}{9}=\frac{\text{دو}}{12}$ أي $9\times\text{دو}=12\,(9-\text{س})$.

ومنه م د $= \frac{12}{9}(9 - س) = \frac{4}{3}(9 - س)$ .... (4)

• لكي يكون محيط متوازي الأضلاع م د ج هـ يساوي 20 .

يجب أن يكون 2 م هـ + 2 م د = 20

أي م هـ + م د = 10 .... (5)

لنعوض في (5) كلاً من م هـ ، م د بقيمته بدلالة س فنجد :

$\frac{2}{3}س + \frac{4}{3}(9 - س) = 10$.

وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول س .

• لنحل في ح هذه المعادلة ، أي :

$\frac{2}{3}س + 12 - \frac{4}{3}س = 10$

$\frac{2}{3}س - \frac{4}{3}س = 10 - 12$

$-\frac{2}{3}س = -2$ ومنه $-2س = -6$

أي **س = 3**

فمجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة { 3 } .

نستنتج أن أ م = 3 .

• لنتحقق أن محيط متوازي الأضلاع م هـ ج د يساوي 20.

لدينا م هـ $= \frac{2}{3}س = \frac{2}{3} \times 3 = 2$.

و $\text{ءِد} = \frac{4}{3}(9 - \text{س}) = \frac{4}{3}(9 - 3)$

$\text{ءِد} = \frac{4}{3} \times 6 = 8$

إذن $2(\text{ءِد} + \text{ءِهـ}) = 2(8 + 2) = 20$.

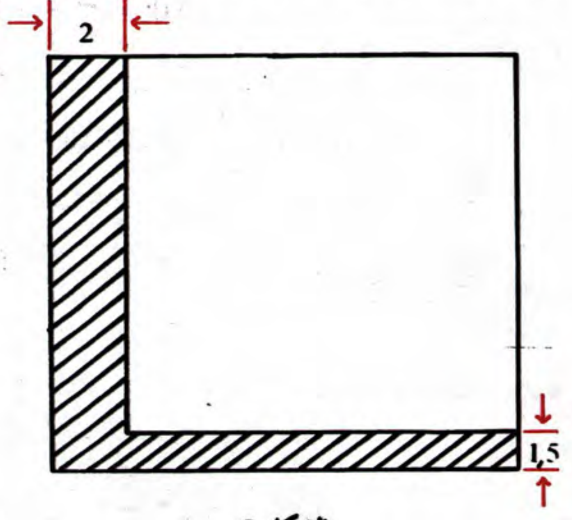
مسألة 3 :

وحدة الطول هي المليمتر .

صفيحة مربعة الشكل ، تعرضت للحرارة والطرق فتمددت طولاً بمقدار 2 ، وعرضاً بمقدار 1,5 .

ونتيجة لذلك زادت مساحتها بمقدار 34,5 .

ـ عيّن بعدي الصفيحة قبل هذا التغير وبعده .



الشكل 2

الحل :

• المعالم في هذه المسألة هي :

ـ الفرق بين مساحتي الصفيحة بعد وقبل التغير

ـ الفرق بين بعدي الصفيحة بعد وقبل التغير.

• نسمى $س$ طول ضلع هذه الصفيحة قبل التغير. فتكون مساحتها $س^2$
ـ ويصبح بعداها بَعد التغير $س + 2$ و $س + 1,5$.
ومساحتها $(س + 2)(س + 1,5)$.

• زادت المساحة بَعد التغير بمقدار 34,5 حسب المعطيات
أي $(س + 2)(س + 1,5) - س^2 = 34,5$.

$س^2 + 2 س + 1,5 س + 2 \times 1,5 - س^2 = 34,5$

$س^2 - س^2 + 3,5 س + 3 = 34,5$

$3,5 س = 31,5$.

وهي معادلة من الدرجة الأولى في ح مجموعة حلولها {9}.
إذن طول ضلع الصفيحة قبل التغير يساوي 9.
وبعدا الصفيحة بعد التغير هما $(9 + 2)$ و $(9 + 1,5)$ أي 11 و 10,5

• **التحقيق** :
مساحة الصفيحة قبل التغير تساوي $9^2 = 81$
مساحة الصفيحة بعد التغير تساوي $11 \times 10,5 = 115,5$
الفرق بين مساحتي الصفيحة قبل وبعد التغير يساوي :
$115,5 - 81 = 34,5$.

مسألة 4 :

اقتسم أحمد ومحمد وفاطمة وعلي تركة بحيث كانت حصصهم متناسبة مع الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5.

1) عيّن نسبة كل وارث من هذه التركة.

2) إذا تمّ التقسيم بحيث تكون الحصص متناسبة مع الأعداد 8 ، 9 ، 11 ، 14. فمن المستفيد من هذا التقسيم ومن الخاسر ؟

3) إذا قُدّرت الزيادة في حصة الوارث المستفيد بمبلغ 360 د.ج فما هي قيمة التركة ؟ وما هي حصة كل وارث في التقسيم الأخير؟

4) كم ستكون حصتا محمد وعلي إذا كانت حصتنا أحمد وفاطمة هما على التوالي 2178 دج و 1800 دج وكانت حصة محمد وسطاً متناسبا لحصتي أحمد وفاطمة ؟

الحل :

1) نسمي س ، ع ، ص ، ل حصص الورثة الأربعة على الترتيب ، ونسمي م قيمة التركة .

فيكون $\frac{\text{س}}{2}=\frac{\text{ع}}{3}=\frac{\text{ص}}{4}=\frac{\text{ل}}{5}$.

وحسب خواص التناسب نجد أن :

$$\frac{\text{س}}{2}=\frac{\text{ع}}{3}=\frac{\text{ص}}{4}=\frac{\text{ل}}{5}=\frac{\text{س}+\text{ع}+\text{ص}+\text{ل}}{2+3+4+5}=\frac{\text{م}}{14}$$

نستنتج أن :

$\frac{\text{س}}{2}=\frac{\text{م}}{14}$ ومنه $\text{س}=\frac{2\,\text{م}}{14}$ أي $\text{س}=\frac{1}{7}\,\text{م}$

$\frac{\text{ع}}{3}=\frac{\text{م}}{14}$ ومنه $\text{ع}=\frac{3\,\text{م}}{14}$ أي $\text{ع}=\frac{3}{14}\,\text{م}$

$\frac{\text{ص}}{4}=\frac{\text{م}}{14}$ ومنه $\text{ص}=\frac{4\,\text{م}}{14}$ أي $\text{ص}=\frac{2}{7}\,\text{م}$

$\frac{\text{ل}}{5}=\frac{\text{م}}{14}$ ومنه $\text{ل}=\frac{5\,\text{م}}{14}$ أي $\text{ل}=\frac{5}{14}\,\text{م}$

2) نفرض أن حصص الورثة الأربعة في التقسيم الثاني هي $س'$ ، $ع'$ ، $ص'$ ، $ل'$ على التوالي.

فيكون : $\frac{س'}{8} = \frac{ع'}{9} = \frac{ص'}{11} = \frac{ل'}{14}$.

ومنه : $\frac{س'}{8} = \frac{ع'}{9} = \frac{ص'}{11} = \frac{ل'}{14} = \frac{س' + ع' + ص' + ل'}{14 + 11 + 9 + 8} = \frac{م}{42}$

$\frac{س'}{8} = \frac{م}{42}$ ومنه $س' = \frac{8 م}{42}$ أي $س' = \frac{4}{21} م$

$\frac{ع'}{9} = \frac{م}{42}$ ومنه $ع' = \frac{9 \times م}{42}$ أي $ع' = \frac{3}{14} م$

$\frac{ص'}{11} = \frac{م}{42}$ ومنه $ص' = \frac{11 م}{42}$ أي $ص' = \frac{11}{42} م$

$\frac{ل'}{14} = \frac{م}{42}$ ومنه $ل' = \frac{14 م}{42}$ أي $ل' = \frac{1}{3} م$

★ لكي نعيّن المستفيد من هذا التقسيم نقارن بين حصتي كل وارث في التقسيمين.

• لاحظ أن حصة محمد لم تتغير في التقسيمين أي $ع = ع' = \frac{3}{14} م$.

• بينما حصة أحمد هي $\frac{1}{7}$ م في التقسيم الأول و $\frac{4}{21}$ م في التقسيم الثاني.

لكن $\frac{1}{7}$ م < $\frac{4}{21}$ م (لأن $1 \times 21 < 7 \times 4$)

نستنتج أن أحمد **مستفيد** من هذا التقسيم.

• وحصة فاطمة في التقسيم الأول هي $\frac{2}{7}$ م بينما حصتها في التقسيم الثاني هي $\frac{11}{42}$ م.

وبما أن $\frac{2}{7} > \frac{11}{42}$ إذن $\frac{2}{7}$ م > $\frac{11}{42}$ م

نستنتج أن فاطمة خسرت في هذا التقسيم.

• حصة علي في التقسيم الأول كانت $\frac{5}{14}$ م وحصته في التقسيم الثاني هي $\frac{1}{3}$ م.

إذن علي قد خسر في هذا التقسيم لأن $\frac{5}{14} > \frac{1}{3}$.

ونستنتج من هذا أن المستفيد الوحيد من التقسيم الثاني هو أحمد.

3) الزيادة في حصة أحمد هي:

س' − س = 360.

أي $\frac{4}{21}$ م − $\frac{1}{7}$ م = 360.

$\left(\frac{4}{21} - \frac{1}{7}\right)$ م = 360.

$\left(\frac{4-3}{21}\right)$ م = 360 .

$\frac{1}{21}$ م $= 360$

إذن م $= 360 \times 21$

أي **م = 7560 د ج**

• حصة أحمد هي : س' $=$ $\frac{4}{21}$ م

أي : س' $= \frac{4}{21} \times 7560 = 1440$

أي : **س' = 1440 د ج**

• حصة محمد هي : ع' $=$ $\frac{3}{14}$ م $= \frac{3}{14} \times 7560$

أي : **ع' = 1620 د . ج**

• حصة فاطمة هي : ص' $=$ $\frac{11}{42}$ م $= \frac{11}{42} \times 7560$

أي : **ص' = 1980 د . ج**

• حصة علي هي : ل' $=$ $\frac{1}{3}$ م $= \frac{1}{3} \times 7560$

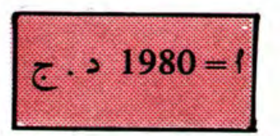
أي : **ل' = 2520 د . ج**

4) نعلم أن حصة محمد هي وسط متناسب لحصتي أحمد وفاطمة في التقسيم الثالث فإذا كانت حصة محمد في هذا التقسيم هي أ ، فإن :

$$\frac{2178}{\text{أ}} = \frac{\text{أ}}{1800}$$

وهذا يعني أن $\text{أ}^2 = 1800 \times 2178$

ومنه : $\text{أ} = \sqrt{2178 \times 1800}$



وتكون حصة علي مساوية الفرق :

$$7560 - (2178 + 1800 + 1980)$$

إن حصة علي في هذا التقسيم تساوي 1602 د.ج

2• مسائل تؤول إلى جُمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مسألة 1 :

يضم أحد رفوف مكتبة منزلية 42 كتاباً. سُمك بعض الكتب 3 سم، وسمك البعض الآخر 5 سم. هذه الكتب مرصوصة في صف طوله 150 سم.
أوجد عدد الكتب التي سمكها 3 سم، وعدد الكتب التي سمكها 5 سم.

الحل :

نسمي س عدد الكتب ذات السمك 3 سم و ع عدد الكتب ذات السمك 5 سم، فيكون :

$$\text{س} + \text{ع} = 42 \quad ...... \quad (1)$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س، ع.
الطول الذي تشغله الكتب ذات السمك 3 سم هو 3 س.
والطول الذي تشغله الكتب ذات السمك 5 سم هو 5 ع.
إذن $3\text{س} + 5\text{ع} = 150 \quad ...... \quad (2)$

وهذه أيضا معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س . ع .

ولإيجاد عدد الكتب من كل نوع ، علينا أن نحل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = 42 \quad \ldots\ldots\ldots\ (1) . \\ 3\text{س} + 5\text{ع} = 150 \quad \ldots\ldots\ (2) . \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد (− 3) فنجد الجملة :

$$\begin{cases} -3\text{س} - 3\text{ع} = -126 \\ 3\text{س} + 5\text{ع} = 150 \end{cases}$$

وبالجمع نجد :

$$(-3\text{س} - 3\text{ع}) + (3\text{س} + 5\text{ع}) = -126 + 150 .$$

$$-3\text{س} - 3\text{ع} + 3\text{س} + 5\text{ع} = 24$$

$$(-3\text{س} + 3\text{س}) - 3\text{ع} + 5\text{ع} = 24$$

أي $2\text{ع} = 24$

إذن $\boxed{\text{ع} = 12}$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$\text{س} + 12 = 42$$

أي $\boxed{\text{س} = 30}$

إذن حل الجملة السابقة هو (30 ، 12)

• التحقيق :

لاحظ أن
$$\begin{cases} 30 + 12 = 42 . \\ 3 \times 30 + 5 \times 12 = 150 . \end{cases}$$

نستنتج أن عدد الكتب التي سمكها 3 سم هو 30 كتاباً.
وعدد الكتب التي سمكها 5 سم هو 12 كتاباً .

مسألة 2 :

(وحدة الطول هي السنتمتر) .

صفيحة معدنية مكونة من مربعين متجاورين مختلفين هما أ ب حـ ء ؛ حـ هـ ف و ، مساحتاهما متناسبتان مع العددين 4 ، 9 .

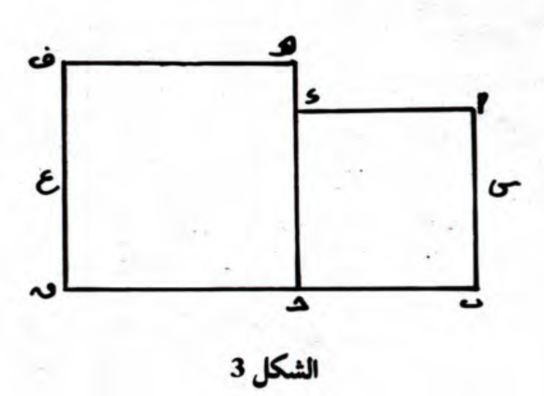
1) أوجد طول ضلع كل منهما إذا كان المحيط الكلي للصفيحة هو 96 .

2) أوجد طول ضلع صفيحة أخرى مربعة الشكل لها نفس مساحة الصفيحة السابقة .

الحل :

1) • نسمى س طول ضلع المربع أ ب حـ ء ، فتكون مساحته س^2 .

• ونسمى ع طول ضلع المربع حـ هـ ف و ، فتكون مساحته ع^2 .



الشكل 3

نعلم أن س^2 ، ع^2 متناسبان مع العددين 4 ، 9

أي $\frac{\text{س}^2}{4} = \frac{\text{ع}^2}{9}$

نستنتج أن : $\sqrt{\frac{\text{س}^2}{4}} = \sqrt{\frac{\text{ع}^2}{9}}$ أي $\frac{|\text{س}|}{2} = \frac{|\text{ع}|}{3}$

لكن |س| = س و |ع| = ع لأن س ، ع عددان حقيقيان موجبان (أطوال)،

إذن $\frac{\text{س}}{2} = \frac{\text{ع}}{3}$

أي 3 س = 2 ع ...... (1)

وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع .

ولإيجاد هذين المجهولين يجب علينا أن نبحث عن علاقة أخرى بين المجهولين س ، ع .

إن محيط الصفيحة هو :

(اب + ب جـ + ا د) + (د هـ + هـ ف + ف و + و جـ) = 96

أي (س + س + س) + (د هـ + ع + ع + ع) = 96

3 س + د هـ + 3 ع = 96

ولكن د هـ = جـ هـ − جـ د = ع − س

فيكون :

3 س + ع − س + 3 ع = 96

أو 2 س + 4 ع = 96 .... (2)

وهي أيضا معادلة ثانية من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع .

ولإيجاد هذين المجهولين ، أي لإيجاد طول ضلع كل من المربعين يلزمنا أن نحل في المجموعة ح × ح جملة المعادلتين (1) ، (2).

$$\begin{cases} 3\,\text{س} - 2\,\text{ع} = 0 & \text{.. ... (1)} \\ 2\,\text{س} + 4\,\text{ع} = 96 & \text{...... (2)} \end{cases}$$

وهذا يعني أننا وضعنا معطيات المسألة المفروضة على شكل جملة ، لحلها نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 2 فنجد المعادلة المكافئة لها :

$$6 س - 4 ع = 0$$

وبذلك نحصل على الجملة الآتية

$$\begin{cases} 6 س - 4 ع = 0 \\ 2 س + 4 ع = 96 \end{cases}$$

وبالجمع نجد :

$$6 س - 4 ع + 2 س + 4 ع = 96$$

أي $8 س = 96$.

فيكون $س = \frac{96}{8} = 12$.

وبالتعويض في المعادلة (1) أي $3 س = 2 ع$

نجد أن $ع = \frac{3 س}{2} = \frac{3 \times 12}{2} = 18$

نستنتج أن حل الجملة السابقة هو : (12 ، 18) .

هذا يعني أن طول ضلع المربع أ ب حـ د هو 12 سم ،

وطول ضلع المربع هـ ف و حـ هو 18 سم .

2) نسمي م مساحة الصفيحة الثالثة ، فيكون

$$م = س^2 + ع^2 = 12^2 + 18^2$$

ويكون طول الضلع ض للصفيحه الثالثة التي مساحتها م هو :

$$ض = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{144 + 324} = \sqrt{468}$$

أي $ض \simeq 21,7$ سم .

• لنتحقق أن :

$$\left.\begin{array}{c}\frac{12^2}{4}=\frac{18^2}{9}\\ \text{و}\\ 2\times 12+4\times 18=96\end{array}\right\}$$

لدينا : $\frac{12^2}{4}=\frac{12\times 12}{4}=3\times 12=36$

و $\frac{18^2}{9}=\frac{18\times 18}{9}=2\times 18=36$

اذن $\frac{12^2}{4}=\frac{18^2}{9}$.

ولدينا : $2\times 12+4\times 18=24+72=96$.

مسألة 3 :

انطلقت سيارة من مدينة ا على الساعة السادسة والنصف بسرعة متوسطة قدرها 60 كم / ساعة متوجهة نحو مدينة ب .

وفي نفس الوقت انطلقت دراجة نارية من المدينة ب نحو المدينة ا بسرعة متوسطة قدرها 52 كم / ساعة .

عين اللحظة التي تتلاقى فيها السيارة مع الدراجة ، وبُعد نقطة التلاقي عن المدينة ا ، علماً بأن المسافة بين المدينتين ا ، ب هي 196 كم .

مثل ذلك بيانياً .

الحل :

نسمى ع المسافة بين المدينة ا ونقطة تلاقي السيارة مع الدراجة .

ونسمي س الزمن الذي يستغرقه المتحركان من لحظة انطلاقهما حتى لحظة تلاقيهما .

بالنسبة إلى السيارة يكون :

ع = 60 س ...... (1) وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع لأن المسافة تساوى جداء السرعة المتوسطة والزمن.

وبالنسبة إلى الدراجة النارية يكون :

196 – ع = 52 س ...... (2) وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع .

ولإيجاد المسافة ع بين المدينة أ ونقطة التلاقي،والزمن س الذي فيه تلتقي السيارة والدراجة ، يلزمنا أن نحل الجملة الآتية :

$$\begin{cases} \text{ع} = 60\,\text{س} & \text{.......... (1)} \\ 196 - \text{ع} = 52\,\text{س} & \text{...... (2)} \end{cases}$$

التي هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بالمجهولين الحقيقيين س ، ع .

• لنحل هذه الجملة في المجموعة ح × ح .

بالجمع نجد :

$$196 - \text{ع} + \text{ع} = 60\,\text{س} + 52\,\text{س}$$

$$196 = 112\,\text{س}$$

فيكون $\text{س} = \frac{196}{112} = \frac{7}{4}$

ويكون $\text{ع} = 60\,\text{س} = 60 \times \frac{7}{4} = 105$.

فمجموعة حلول الجملة المفروضة هي $\left\{ \left(\frac{7}{4} \text{ ، } 105 \right) \right\}$

ونستنتج أن بُعد نقطة تلاقي السيارة والدراجة عن المدينة أ هو 105 كم .

وأن الزمن الذي يلتقيان فيه هو :

$$س = \frac{7}{4} سا.$$

أي $س = 1'45$ سا.

أي أنهما يلتقيان بعد ساعة و 45 دقيقة من لحظة تحركهما.

وبما أنهما تحركا في الساعة 6 و 30 دقيقة ، إذن يلتقيان في الساعة 7 و 75 دقيقة أي في الساعة 8 و 15 دقيقة.

• نعلم أن الزمن المستغرق يساوي $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

إذن الزمن الذي تستغرقه السيارة لكي تصل إلى المدينة ب هو $\frac{196}{60}$

أي $3'16$ سا.

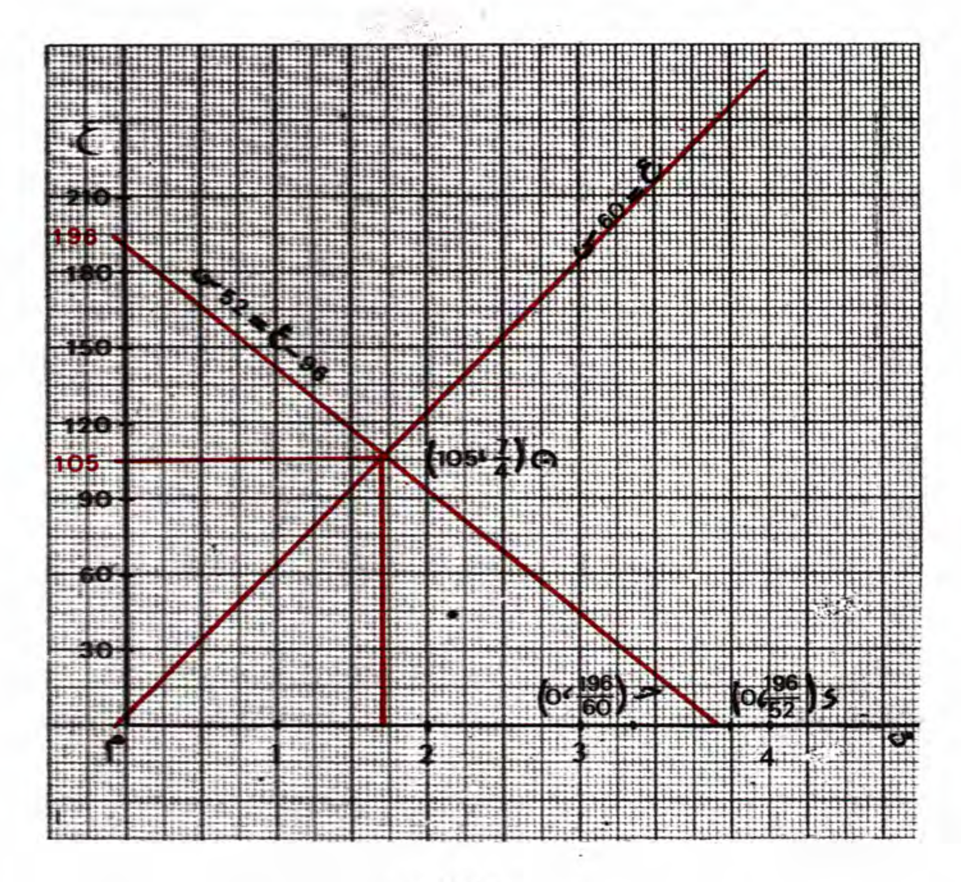
والزمن الذي تستغرقه الدراجة لكي تصل إلى المدينة ا هو $\frac{196}{52}$

أي $3'46''9$ سا تقريباً.

التمثيل البياني :

نأخذ نصفي مستقيمين متعامدين [م س و [م ع ، ونمثل على [م س الزمن حيث كل 2 سم تمثّل 1 ساعة.

ونمثّل على [م ع المسافة حيث كل 1 سم يمثّل 30 كم.



الشكل 4

هـ هي نقطة تلاقي السيارة والدراجة .

ح هي لحظة وصول السيارة إلى المدينة ب

ء هي لحظة وصول الدراجة إلى المدينة أ .

التحقيق :

$$\left.\begin{array}{r} \frac{7}{4} \times 60 = 105 \; . \\ \frac{7}{4} \times 52 = 105 - 196 \; . \end{array}\right\}$$

تمارين

1. عمر أبٍ 33 سنة وعمر ابنه 8 سنوات .
ـ بعد كم سنة يصبح عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن ؟

2. ا ب حـ مثلث حيث $\hat{ب} = \frac{4}{5}\hat{ا}$ ، $\hat{حـ} = \frac{9}{5}\hat{ا}$.
ـ احسب $\hat{ا}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{حـ}$.

3. (ق) مستقيم مزود بمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) .
ا ، ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما − 3 ، 4 .
ـ عيّن مجموعة النقط ﻫ من (ق) بحيث $\frac{\overline{ﻫا}}{\overline{ﻫب}} = 3$.

4. المسافة بين مدينتين ا ، ب هي 135 كم ، فإذا انطلق متسابقان من مدينة ا في نفس الوقت وكانت سرعة الأول 45 كم / سا . وتعطّل الثاني في الطريق واستغرق إصلاح سيارته $\frac{1}{2}$ ساعة ومع ذلك وصل إلى المدينة ب قبل الأول بوقت قدره 15 دقيقة .
ـ فما سرعة المتسابق الثاني ؟

5. أرض مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها أُنْشيء على حوافها ممّر عرضه 5 م فنقصت مساحتها 650 $م^2$.
ـ أوجد بعدي هذه الأرض .

6. سعة ثلاثة أواني 120 ل ، إذا كانت سعة الإناء الثاني تساوي $\frac{1}{7}$ سعة الأول وسعة الإناء الثالث تساوي $\frac{2}{3}$ سعة الثاني ناقصاً منها 10 ل .
ـ ما هي سعة كل إناء ؟

7. أراد مزارع أن يخلط نوعين من السماد ، سعر الكيلوغرام من النوع الأول 32 د . ج وسعر الكيلوغرام من النوع الثاني 40 د . ج ليؤلف مزيجاً وزنه 100 كغ بحيث يصبح سعر الكيلوغرام من هذا المزيج 36,8 د . ج .
- احسب وزن ما يأخذه من كل نوع .

8. (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلم متعامد ومتجانس . ط عدد حقيقي .
ا (- 3 ، 4) ، ب (3 ، 0) ، حـ (0 ، ط) ثلاث نقط من المستوي
1) احسب ا حـ ، ب حـ بدلالة ط .
2) عيّن العدد ط . بحيث يكون $اب^2 + احـ^2 = بحـ^2$
3) عيّن العدد ط بحيث تكون حـ هي منتصف [اب] .

9. عدد مكوّن من رقمين ، رقم آحاده يزيد 2 عن رقم عشراته ، وإذا بدلنا موضعي الرقمين فإننا نحصل على عدد آخر ، مجموع هذا العدد والعدد الأول يساوي 132 .
أوجد العدد الأول .

10. عدد يتكوّن من ثلاثة أرقام ، رقم آحاده يزيد عن رقم عشراته ، بمقدار 2 ويزيد عن رقم مئاته بمقدار 3 ، ويتكون عدد ثان من رقمين ، رقم آحاده هو مجموع رقمي آحاد ومئات العدد الأول ، ورقم عشراته يزيد عن رقم عشرات الأول بمقدار 1 .
- أوجد هذين العددين .

11. ﻙ (م ، 6) دائرة ؛ ا نقطة داخل (ﻙ) بحيث م ا = 2 ، الدائرة د (ا ، 5) تقطع (ﻙ) في نقطتين ب ، حـ . المستقيم (م ا) يقطع (ب حـ) في هـ .
1) برهن أن كلاً من المثلثين م هـ ب ، ا هـ ب قائم في هـ .
2) احسب ا هـ ثم استنتج طول الوتر [ب حـ] .
(طبق نظرية فيثاغورث على كل من المثلثين م هـ ب و ا هـ ب)

12. إذا كان مجموع ما يملكه محمد وضعف ما يملكه علي هو 54 دج ، وكان الفرق بين ما يملكه كل منهما 24 د.ج . فما هو المبلغ الذي يملكه كل منهما ؟ .

13. أوجد عدداً ناطقاً بحيث أنه :

ـ إذا أضفت 3 إلى كل من حدّي الكسر الممثّل به ، تحصل على العدد الناطق $\frac{4}{5}$.

ـ وإذا طرحت 4 من كل من حدّي هذا الكسر تحصل على العدد الناطق $\frac{1}{3}$.

14. إذا كان مجموع أربعة أمثال عمر سعيد وثلاثة أمثال عمر أخيه 37 سنة والفرق بين خمسة أمثال عمر سعيد وضعف عمر أخيه 29 سنة .

ـ فما عمر كل منهم ؟

15. مستطيل محيطه 192 م ، فإذا قلت مساحته بحيث أصبح الطول $\frac{4}{5}$ الطول الأصلي والعرض $\frac{3}{4}$ العرض الأصلي صار المحيط 132 م .

ـ فما مساحته الأصلية ؟

16. اشترى طالب كتباً ودفاتر ، ثمن الكتاب الواحد يزيد خمسة دنانير عن ثمن 4 دفاتر ، والثمن الإجمالي لخمسة كتب و 12 دفتراً هو 375 ديناراً

ـ ما ثمن الكتاب وما ثمن الدفتر . (للكتب نفس السعر وللدفاتر نفس السعر) .

17. حقل مستطيل محيطه 2 ط . حيث ط عدد حقيقي موجب .

إذا زدنا في طوله 2 م وفي عرضه 16 م ، فإن مساحة هذا المستطيل تزيد بمقدار 264 م^2 .

1) احسب كلاً من طوله وعرضه بدلالة العدد ط . عين المجموعة التي يجب أن ينتمي إليها ط لكي يكون لهذه المسألة حل .

2) من أجل أية قيمة للعدد ط يكون هذا الحقل مربعاً ؟ عين حينئذ طول ضلع هذا المربع .

18. من أجل تفصيل عدد من الثياب ، اشترت أسرة لفات من القماش بعضه ملون وبعضه موحد اللون . سعر لفة القماش الموحد اللون هو 60٪ من سعر لفة القماش الملون . وثمن 15 لفة هو 2280 د.ج .

ما عدد لفات كل نوع إذا كان سعر اللفة الواحدة من القماش وحيد اللون هو 120 د.ج ؟

19. اشترى تاجر صفقة مكونة من 3 قناطر بطاطا و 5 قناطر من الطماطم . ثمن 10 كغ من الطماطم يساوي ثمن 25 كغ من البطاطا . ودفع التاجر من هذه الصفقة 6600 ديناراً . ما هو ثمن الكيلوغرام من البطاطا ، وما ثمن الكيلوغرام من الطّماطم ؟

20. في الساعة السابعة صباحاً انطلق قطار من الجزائر العاصمة متوجهاً إلى مدينة الشلف عن طريق البليدة بسرعة 60 كم / سا . وفي نفس الوقت انطلقت سيارة من محطة البليدة متجهة نحو الشلف بسرعة 40 كم / سا . فإذا كانت المسافة بين الجزائر والبليدة هي 42 كم فأوجد متى يلحق القطار السيارة ؟

21. أ ، ب ميناءان بحريان المسافة بينهما 300 كم .
قامت باخرة من أ قاصدة ب ، تسير بسرعة متوسطة قدرها 45 كم / سا . وبعد قيامها بثلث ساعة قامت باخرة أخرى من ب متوجهة نحو أ بسرعة متوسطة قدرها 50 كم / سا .
أوجد متى تتلاقى الباخرتان وعلى أي بعد من الميناء ب يكون ملتقاهما . مثل ذلك بيانياً .

22. إناءان فارغان لهما نفس الوزن .
وسعة أحد الإناءين تساوي $\frac{3}{4}$ سعة الإناء الآخر .
نملأ الإناءين بسائل وزنه الحجمي 0,8 كغ / دم^3 فيصبح وزناهما مملوءين هما 2,645 كغ و 2,825 كغ على الترتيب .
1) ما هو وزن كل إناء وهو فارغ .
2) ما هي سعة كل إناء .

جدول المربعات والجذور التربيعية للأعداد الطبيعية من 1 إلى 100

n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1
2	4	1,414
3	9	1,732
4	16	2,000
5	25	2,236
6	36	2,449
7	49	2,646
8	64	2,828
9	81	3,000
10	100	3,162
11	121	3,317
12	144	3,464
13	169	3,606
14	196	3,742
15	225	3,873
16	256	4,000
17	289	4,123
18	324	4,243
19	361	4,359
20	400	4,472
21	441	4,583
22	484	4,690
23	529	4,796
24	576	4,899
25	625	5,000
26	676	5,099
27	729	5,196
28	784	5,292
29	841	5,385
30	900	5,477
31	961	5,568
32	1 024	5,657
33	1 089	5,745
34	1 156	5,831
35	1 225	5,916
36	1 296	6,000
37	1 369	6,083
38	1 444	6,164
39	1 521	6,245
40	1 600	6,325
41	1 681	6,403
42	1 764	6,481
43	1 849	6,557
44	1 936	6,633
45	2 025	6,708
46	2 116	6,782
47	2 209	6,856
48	2 304	6,928
49	2 401	7,000
50	2 500	7,071
51	2 601	7,141
52	2 704	7,211
53	2 809	7,280
54	2 916	7,348
55	3 025	7,416
56	3 136	7,483
57	3 249	7,550
58	3 364	7,616
59	3 481	7,681
60	3 600	7,746
61	3 721	7,810
62	3 844	7,874
63	3 969	7,937
64	4 096	8,000
65	4 225	8,062
66	4 356	8,124
67	4 489	8,185
68	4 624	8,246
69	4 761	8,307
70	4 900	8,367
71	5 041	8,426
72	5 184	8,485
73	5 329	8,544
74	5 476	8,602
75	5 625	8,660
76	5 776	8,718
77	5 929	8,775
78	6 084	8,832
79	6 241	8,888
80	6 400	8,944
81	6 561	9,000
82	6 724	9,055
83	6 889	9,110
84	7 056	9,165
85	7 225	9,220
86	7 396	9,274
87	7 569	9,327
88	7 744	9,381
89	7 921	9,434
90	8 100	9,487
91	8 281	9,539
92	8 464	9,592
93	8 649	9,644
94	8 836	9,695
95	9 025	9,747
96	9 216	9,798
97	9 409	9,849
98	9 604	9,899
99	9 801	9,950
100	10 000	10,000

جدول المربعات والجذور التربيعية للأعداد الطبيعية من 101 إلى 200

ن	ن²	√ن
101	10 201	10,0499
102	10 404	10,0995
103	10 609	10,1489
104	10 816	10,1980
105	11 025	10,2470
106	11 236	10,2956
107	11 449	10,3441
108	11 664	10,3923
109	11 881	10,4403
110	12 100	10,4881
111	12 321	10,5357
112	12 544	10,5830
113	12 769	10,6301
114	12 996	10,6771
115	13 225	10,7238
116	13 456	10,7703
117	13 689	10,8167
118	13 924	10,8628
119	14 161	10,9087
120	14 400	10,9545
121	14 641	11,0000
122	14 884	11,0454
123	15 129	11,0905
124	15 376	11,1355
125	15 625	11,1803
126	15 876	11,2250
127	16 129	11,2694
128	16 384	11,3137
129	16 641	11,3578
130	16 900	11,4018
131	17 161	11,4455
132	17 424	11,4891
133	17 689	11,5326
134	17 956	11,5758
135	18 225	11,6190
136	18 496	11,6619
137	18 769	11,7047
138	19 044	11,7473
139	19 321	11,7898
140	19 600	11,8322
141	19 881	11,8743
142	20 164	11,9164
143	20 449	11,9583
144	20 736	12,0000
145	21 025	12,0416
146	21 316	12,0830
147	21 609	12,1244
148	21 904	12,1655
149	22 201	12,2066
150	22 500	12,2474
151	22 801	12,2882
152	23 104	12,3288
153	23 409	12,3693
154	23 716	12,4097
155	24 025	12,4499
156	24 336	12,4900
157	24 649	12,5300
158	24 964	12,5698
159	25 281	12,6095
160	25 600	12,6491
161	25 921	12,6886
162	26 244	12,7279
163	26 569	12,7671
164	26 896	12,8062
165	27 225	12,8452
166	27 556	12,8841
167	27 889	12,9228
168	28 224	12,9615
169	28 561	13,0000
170	28 900	13,0384
171	29 241	13,0767
172	29 584	13,1149
173	29 929	13,1529
174	30 276	13,1909
175	30 625	13,2288
176	30 976	13,2665
177	31 329	13,3041
178	31 684	13,3417
179	32 041	13,3791
180	32 400	13,4164
181	32 761	13,4536
182	33 124	13,4907
183	33 489	13,5277
184	33 856	13,5647
185	34 225	13,6015
186	34 596	13,6382
187	34 969	13,6748
188	35 344	13,7113
189	35 721	13,7477
190	36 100	13,7840
191	36 481	13,8203
192	36 864	13,8564
193	37 249	13,8924
194	37 636	13,9284
195	38 025	13,9642
196	38 416	14,0000
197	38 809	14,0357
198	39 204	14,0712
199	39 601	14,1067
200	40 000	14,1421

النسب المثلثية للزوايا درجة فدرجة

الدرجات	جب	تجب	ظل	تظل	
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
	تجب	جب	تظل	ظل	الدرجات

جدول النسب المثلثية للزوايا غرادا فغرادا

	تظل	ظل	تجب	جب	الغرادات
99	63,6567	0,0157	0,9999	0,0157	1
98	31,8205	0,0314	0,9995	0,0314	2
97	21,2049	0,0472	0,9989	0,0471	3
96	15,8945	0,0629	0,9980	0,0628	4
95	12,7062	0,0787	0.9969	0,0785	5
94	10,5789	0,0945	0,9956	0,0941	6
93	9,0579	0,1104	0,9940	0,1097	7
92	7,9158	0,1263	0,9921	0,1253	8
91	7,0264	0,1423	0,9900	0,1409	9
90	6,3138	0,1584	0,9877	0,1564	10
89	5,7297	0,1745	0,9851	0,1719	11
88	5,2422	0,1908	0,9823	0,1874	12
87	4,8288	0,2071	0,9792	0,2028	13
86	4,4737	0,2235	0,9759	0,2181	14
85	4,1653	0,2401	0,9724	0,2334	15
84	3,8947	0,2568	0,9686	0,2487	16
83	3,6554	0,2736	0,9646	0,2639	17
82	3,4420	0,2905	0,9603	0,2790	18
81	3,2506	0,3076	0,9558	0,2940	19
80	3,0777	0,3249	0,9511	0,3090	20
79	2,9208	0,3424	0,9461	0,3239	21
78	2,7776	0,3600	0,9409	0,3387	22
77	2,6464	0,3779	0,9354	0,3535	23
76	2,5257	0,3959	0,9298	0,3681	24
75	2,4142	0,4142	0,9239	0,3827	25
74	2,3109	0,4327	0,9178	0,3971	26
73	2,2148	0,4515	0,9114	0,4115	27
72	2,1251	0,4706	0,9048	0,4258	28
71	2,0413	0,4899	0,8980	0,4399	29
70	1,9626	0,5095	0,8910	0,4540	30
69	1,8887	0,5295	0,8838	0,4679	31
68	1,8190	0,5498	0,8763	0,4818	32
67	1,7532	0,5704	0,8686	0,4955	33
66	1,6909	0,5914	0,8607	0,5090	34
65	1,6319	0,6128	0,8526	0,5225	35
64	1,5757	0,6346	0,8443	0,5358	36
63	1,5224	0,6569	0,8358	0,5490	37
62	1,4715	0,6796	0,8271	0,5621	38
61	1,4229	0,7028	0,8181	0,5750	39
60	1,3764	0,7265	0,8090	0,5878	40
59	1,3319	0,7508	0,7997	0,6004	41
58	1,2892	0,7757	0,7902	0,6129	42
57	1,2482	0,8012	0,7804	0,6252	43
56	1,2088	0,8273	0,7705	0,6374	44
55	1,1709	0,8541	0,7604	0,6494	45
54	1,1343	0,8816	0,7501	0,6613	46
53	1,0990	0,9099	0,7396	0,6730	47
52	1,0649	0,9391	0,7290	0,6845	48
51	1,0319	0,9691	0,7181	0,6959	49
50	1,0000	1,0000	0,7071	0,7071	50
الغرادات	ظل	تظل	جب	تجب	

محتوى الكتاب

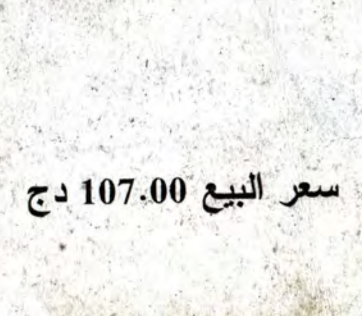


MS – 0902

2004 - 2003

I.S.B.N 9947 – 20 – 089 – 6 ردمك

N° Dépôt légal 659 – 2003 رقم الإيداع القانوني



سعر البيع 107.00 دج